NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4275 Levetidsanalyse**

Faglig kontakt under eksamen: Ioannis Vardaxis

Tlf: 95 36 00 26

Eksamensdato: Lørdag 30. mai 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Godkjent kalkulator. Ett gult ark (A4 med stempel) med dine egne formler og notater.

Annen informasjon:
Tabeller over χ^2-fordelingen med 1 frihetsgrad og standardnormalfordelingen er gitt i vedlegget til slutt i oppgavesettet.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 4

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 *Dieselgeneratorvifte*

La T være tiden til feil for en spesiell type dieselgeneratorvifter. I et utvalg på 40 vifter har man fått følgende data. Her er Y_i de observerte tider (i timer), mens δ_i er sensureringsstatus, der $\delta_i = 1$ hvis Y_i er en feiltid, og $\delta_i = 0$ hvis den er en høyresensurert tid.

i	Y_i	δ_i	i	Y_i	δ_i
1	450	1	21	4850	0
2	1150	1	22	4850	0
3	1600	0	23	5000	0
4	1660	1	24	5000	0
5	1850	0	25	6100	0
6	2030	0	26	6100	0
7	2070	1	27	6100	1
8	2200	0	28	6700	0
9	3000	0	29	7450	0
10	3000	0	30	7800	0
11	3000	0	31	7800	0
12	3100	1	32	8100	0
13	3200	0	33	8100	0
14	3450	1	34	8200	0
15	3750	0	35	8500	0
16	4150	0	36	8500	0
17	4150	0	37	8750	0
18	4300	0	38	8750	1
19	4300	0	39	8750	0
20	4300	0	40	9400	0

a) La $z(t)$ og $Z(t)$ være henholdsvis *hasardfunksjonen* og den *kumulative hasardfunksjonen* for T.

Beskriv kort hvordan en graf av $Z(t)$ kan gi oss informasjon om formen på hasardfunksjonen $z(t)$.

Beregn og plott Nelson-Aalen estimatoren $\hat{Z}_{NA}(t)$ for $Z(t)$ basert på de gitte dataene.

Gir plottet noen indikasjoner om formen på $z(t)$?

Bruk plottet til å beregne en omtrentlig (konstant) verdi for hasardraten $z(t)$ for de første 3000 timene. Hvordan kan du bruke denne verdien til å beregne et grovt anslag for forventet tid til feil (MTTF) for vifta?

b) Hva blir Nelson-Aalen estimatet for $Z(1800)$?

Finn standardfeilen for dette estimatet. Bruk det til å beregne et standard 95% konfidensintervall for $Z(1800)$.

(*Vink:* Følgende formel fra forelesning kan brukes:

$$\widehat{Var(\hat{Z}_{NA}(t))} = \sum_{T_{(i)} \leq t} \frac{d_i}{n_i^2} \quad).$$

Man ønsker også et estimat og et 95% konfidensintervall for andelen av vifter som overlever de første 1800 timer, dvs. for $R(1800)$, der $R(t)$ er pålitelighetsfunksjonen for T. Vis hvordan du kan bruke resultatene for $Z(1800)$ beregnet ovenfor til å finne både estimatet og konfidensintervallet for $R(1800)$.

c) La $\mathcal{T}(t)$ være *Total Time on Test* ved tid t for det gitte utvalget.

Tabellen nedenfor viser verdien på $\mathcal{T}(t)$ ved de 8 feiltidspunktene.

Forklar kort hva verdien for $\mathcal{T}(t)$ betyr, og vis i detalj hvordan de tre første verdiene for $\mathcal{T}(t)$ i tabellen beregnes.

t	450	1150	1660	2070	3100	3450	6100	8750
$\mathcal{T}(t)$	18000	45300	64620	79120	111910	121460	174010	200860

Tegn TTT-plottet basert på tabellen. Gir plottet noen indikasjoner om formen på $z(t)$?

Beregn også testobservatoren for Barlow-Proschans test.

Gir den grunn til å forkaste en nullhypotese om at $z(t)$ er konstant, mot alternativet at den har et monotont forløp? Bruk signifikansnivå 5% ved denne testen.

d) Anta i dette punktet at T er eksponensialfordelt med ukjent hasardrate λ.

Det oppgis at summen av alle observasjonene Y_i er 201510. Bruk dette til å finne maksimum likelihood estimatet for λ. Sammenlign det med anslaget for $z(t)$ som du gjorde i punkt a).

Finn også et estimat, samt et tilnærmet 95% konfidensintervall, for $Z(1800)$ under modellantakelsen i dette punktet.

Sammenlign både estimatet og konfidensintervallet for $Z(1800)$ med de tilsvarende resultatene i punkt b). Kommenter.

Oppgave 2 *Reparerbart system*

Vi betrakter et reparerbart system som opererer fra tid $t = 0$. Ved feil blir systemet reparert og satt tilbake i drift umiddelbart.

a) Forklar kort hva det betyr at en reparasjon er henholdsvis *minimal* og *perfekt*.

Hvilken av disse to typer reparasjon modelleres ved NHPP? Gi en kort forklaring på hvorfor en NHPP er en passende modell i dette tilfellet.

Hvilken modell benyttes for den andre type reparasjon? Gi en kort forklaring.

La $N(t)$ være antall feil for systemet i tidsintervallet $(0, t]$. I det følgende antar vi at $\{N(t) : t > 0\}$ er en ikke-homogen Poisson prosess (NHPP) med intensitetsfunksjon (ROCOF) $w(t; \theta)$ og kumulativ intensitetsfunksjon (CROCOF) $W(t; \theta) = \int_0^t w(u; \theta) du$. Her er θ en parameter, muligens en vektor.

For å gjøre statistisk inferens om θ, observeres systemet i tidsintervallet $[0, \tau]$, for en gitt $\tau > 0$. Dataene består av antall feil D_i i tidsintervaller $(h_{i-1}, h_i]$, for $i = 1, 2, \ldots, r$, der

$$h_0 = 0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_r = \tau.$$

b) Forklar hvorfor vi kan vi konkludere at $D_1, \ldots, D_r$ er uavhengige og Poissonfordelte, med

$$E(D_i) = W(h_i; \theta) - W(h_{i-1}; \theta) \quad \text{for } i = 1, 2 \ldots, r.$$

Bruk dette til å vise at likelihood-funksjonen for θ når observasjonene er gitt som $d_1, \ldots, d_r$, kan skrives

$$L(\theta) = \left\{ \prod_{i=1}^{r} \frac{[W(h_i; \theta) - W(h_{i-1}; \theta)]^{d_i}}{d_i!} \right\} e^{-W(\tau;\theta)}. \tag{1}$$

For en maskin har man registrert antall feil per uke i $r = 10$ uker. La ukene være nummerert som $1, 2, \ldots, 10$, og la d_i være antall feil observert i uke nummer i, $i = 1, \ldots, 10$.

Det antas at feil forekommer som en NHPP med kumulativ intensitetsfunksjon

$$W(t; \lambda, \beta) = \lambda t^{\beta} \text{ for } t > 0,$$

der tidsenheten er *uker* og $\lambda > 0, \beta > 0$ er ukjente parametrer.

De observerte data er gitt ved følgende tabell:

Uke nr. i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antall feil d_i	0	3	4	5	3	1	3	5	7	4

c) Bruk formelen (1) til å vise at log-likelihooden for de gitte dataene kan skrives

$$\ell(\lambda, \beta) = (\ln \lambda) \sum_{i=1}^{10} d_i + \sum_{i=1}^{10} d_i \ln\left(i^{\beta} - (i-1)^{\beta}\right) - \sum_{i=1}^{10} \ln(d_i!) - \lambda \cdot 10^{\beta}.$$

(*Vink:* La $h_i = i$ for $i = 0, 1, \ldots, 10$).

Vis at hvis β er kjent, er maksimum likelhoodestimatoren for λ gitt ved

$$\hat{\lambda}(\beta) = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{10^{\beta}}.$$

Beregn verdien av $\hat{\lambda}(\beta)$ med de gitte dataene hvis det er kjent at $\beta = 1.3$.

Med disse verdiene for β og λ, hva er sannsynligheten for ingen feil i henholdsvis den første uken, og i den 10. uken?

d) Beregn profil-loglikelihoodfunksjonen $\tilde{\ell}(\beta)$ for β.

Grafen til $\tilde{\ell}(\beta)$ med de gitte dataene er gitt på neste side.

Du kan bruke at den maksimale verdi av $\tilde{\ell}(\beta)$ er -18.60.

Bruk grafen (tilnærmet)

1. til å finne maksimum likelihood estimatet for β,
2. til å finne et tilnærmet 95% konfidensintervall for β,
3. til å teste, med signifikansnivå 5%, nullhypotesen at det ikke er noen tidstrend i forekomsten av feil for maskinen.

Finn også maksimum likelihood estimatet for λ.

(I besvarelsen kan du illustrere alt dette med en grov skisse av grafen).

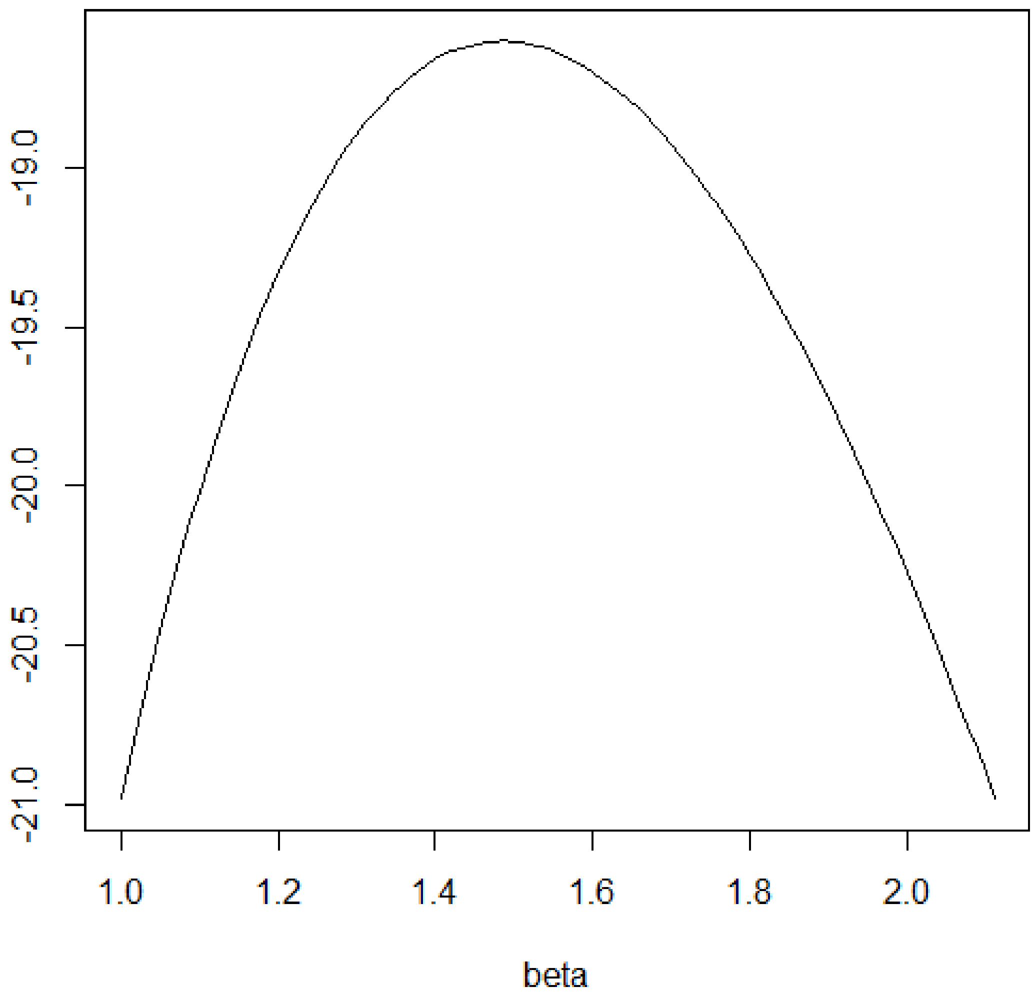
-19.0
-19.5
-20.0
-20.5
-21.0
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
beta

Table of cumulative probabilities of the χ^2-distribution with 1 degree of freedom.

x	$P(X \leq x)$	x	$P(X \leq x)$
0.01	0.079656	2.7	0.899652
0.02	0.112463	2.8	0.905736
0.03	0.137510	2.9	0.911420
0.04	0.158519	3.0	0.916735
0.05	0.176937	3.1	0.921708
0.06	0.193504	3.2	0.926362
0.07	0.208663	3.3	0.930720
0.08	0.222703	3.4	0.934804
0.09	0.235823	3.5	0.938631
0.10	0.248170	3.6	0.942220
0.20	0.345279	3.7	0.945588
0.30	0.416118	3.8	0.948747
0.40	0.472911	3.9	0.951714
0.50	0.520500	4.0	0.954500
0.60	0.561422	4.1	0.957117
0.70	0.597216	4.2	0.959576
0.80	0.628907	4.3	0.961888
0.90	0.657218	4.4	0.964061
1.00	0.682689	4.5	0.966105
1.10	0.705734	4.6	0.968028
1.20	0.726678	4.7	0.969837
1.30	0.745787	4.8	0.971540
1.40	0.763276	4.9	0.973143
1.50	0.779329	5.0	0.974653
1.60	0.794097	5.1	0.976074
1.70	0.807712	5.2	0.977413
1.80	0.820288	5.3	0.978675
1.90	0.831922	5.4	0.979863
2.00	0.842701	5.5	0.980984
2.10	0.852701	5.6	0.982040
2.20	0.861989	5.7	0.983035
2.30	0.870626	5.8	0.983974
2.40	0.878665	5.9	0.984859
2.50	0.886154	6.0	0.985694
2.60	0.893136	6.1	0.986482

Standard normalfordeling

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.7	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.6	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

Standard normalfordeling

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Kritiske verdier i standard normalfordelingen

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

α	z_α
.2	0.842
.15	1.036
.1	1.282
.075	1.440
.05	1.645
.04	1.751
.03	1.881
.025	1.960
.02	2.054
.01	2.326
.005	2.576
.001	3.090
.0005	3.291
.0001	3.719
.00005	3.891
.00001	4.265
.000005	4.417
.000001	4.753