SIF5075 Levetidsanalyse
Våren 2003
*
Litt om Eksponensialfordelingen, Poisson-prosessen, Total Time on Test og Barlow-Proschan's Test

Bo Lindqvist

Notasjon

- $T \sim \text{eksp}(\lambda)$ betyr at T er eksponensialfordelt med sviktintensitet λ, dvs. har tetthet
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ for } t > 0$$

Egenskaper ved eksponensialfordelingen

1. La $T \sim \text{eksp}(\lambda)$. Da vil
$$P(T > t + s | T > s) = P(T > t)$$
Dette sier at fordelingen til T er "glemsom", dvs. at dersom en enhet med levetid T har nådd alder s, vil den gjenværende levetid fremdeles være eksponensialfordelt med parameter λ.
Altså: La T_s være gjenværende levetid for en enhet som har nådd alder s uten å feile. Da er
$$P(T_s > t) = e^{-\lambda t}$$
dvs. at også T_s er $\text{eksp}(\lambda)$.
2. La $T \sim \text{eksp}(\lambda)$ og la $W = aT$. Da er $W \sim \text{eksp}(\lambda/a)$.
3. La T_i for $i = 1, \ldots, n$ være uavhengige, med $T_i \sim \text{eksp}(\lambda_i)$. La videre
$$W = \min(T_1, \ldots, T_n).$$
Da er $W \sim \text{eksp}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$.
4. Spesielt hvis $T_1, \ldots, T_n$ er uavhengige hver med fordeling $\text{eksp}(\lambda)$, er $W \sim \text{eksp}(n\lambda)$.
5. La $T_1, \ldots, T_n$ være uavhengige hver med fordeling $\text{eksp}(\lambda)$. La ordningen av disse være
$$T_{(1)} < T_{(2)} < \cdots < T_{(n)}$$
Da er
$$nT_{(1)},\ (n-1)(T_{(2)} - T_{(1)}),\ (n-2)(T_{(3)} - T_{(2)}),\ \ldots,\\ (n-i+1)(T_{(i)} - T_{(i-1)}),\ \ldots, (T_{(n)} - T_{(n-1)})$$
uavhengige og identisk fordelte $\text{eksp}(\lambda)$.

Dette resultatet er gitt i Teorem B.4 side 475 i Høyland og Rausand. Deres bevis bruker transformasjoner av flerdimensjonale fordelinger. Et mer intuitivt bevis går som følger:

Vi tenker oss at ved tid 0 settes n enheter på test. Potensielle levetider for disse er $T_1, \dots, T_n$, og dermed blir

$$T_{(1)} = \min(T_1, \dots, T_n).$$

Fra punkt 4 følger da at $T_{(1)} \sim \text{eksp}(n\lambda)$, og av dette følger fra punkt 2 at $nT_{(1)} \sim \text{eksp}(\lambda)$.

Etter tid $T_{(1)}$ er det $n-1$ enheter som ikke har feilet. Ved tidspunkt $s = T_{(1)}$ har hver av disse ifølge punkt 1 en gjenværende levetid som er eksp(λ). Det følger av dette at vi fra og med tidspunkt $T_{(1)}$ har samme situasjon som ved tidspunkt 0, bare at det nå er $n-1$ istedenfor n enheter på test. Dermed er tiden til neste feil, $T_{(2)} - T_{(1)}$, fordelt som minimum av $n-1$ eksp(λ)-størrelser og dermed eksp($(n-1)\lambda$). Da får vi igjen ved punkt 2 at $(n-1)(T_{(2)} - T_{(1)})$ er eksp(λ). At $(n-1)(T_{(2)} - T_{(1)})$ er uavhengig av $nT_{(1)}$ følger av punkt 1 som sier at fordelingen til T_s er den samme uansett hva s er.

Dette resonnementet kan så fortsette ved tidspunkt $T_{(2)}$ på en opplagt måte, og vi ender til slutt med å konkludere at $T_{(n)} - T_{(n-1)}$ er eksp(λ).

6. La situasjonen være som i punkt 5. Total Time on Test (TTT) ved tidspunktene $T_{(i)}$ er,

$$\begin{aligned}
Y_1 &\equiv \mathcal{T}(T_{(1)}) = nT_{(1)} \\
Y_2 &\equiv \mathcal{T}(T_{(2)}) = nT_{(1)} + (n-1)(T_{(2)} - T_{(1)}) \\
Y_3 &\equiv \mathcal{T}(T_{(3)}) = nT_{(1)} + (n-1)(T_{(2)} - T_{(1)}) + (n-2)(T_{(3)} - T_{(2)}) \\
&\vdots \quad \vdots \\
Y_n &\equiv \mathcal{T}(T_{(n)}) = nT_{(1)} + (n-1)(T_{(2)} - T_{(1)}) + \cdots (T_{(n)} - T_{(n-1)}) \\
&\quad = T_{(1)} + T_{(2)} + \cdots T_{(n)}
\end{aligned}$$

Resultatet i punkt 5 er at $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ er u.i.f. eksp(λ). Men det betyr at punktene $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ på en tenkt tidsakse danner en Poisson-prosess med intensitet λ (siden "tidene" mellom hendelser i denne prosessen altså er u.i.f. eksp(λ)). Det betyr igjen (ifølge et kjent resultat om Poisson-prosesser) at betinget gitt $Y_n = y_n$, vil $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ ha samme fordeling som ordningen av $n-1$ uavhengige variable som er uniforme på $(0, y_n)$. (Intuitivt betyr dette at dersom vi kjenner tidspunktet y_n for den $n$te hendelse i en Poisson-prosess, vil fordelingen av de $n-1$ første tilsvare $n-1$ uavhengige trekninger som er tilfeldig plassert i intervallet $(0, y_n)$).

Ved å dividere med y_n (og sette inn stor bokstav for Y_n), får vi så det ønskede resultat at under betingelsene fra punkt 5 har vektoren

$$\left(\frac{Y_1}{Y_n}, \frac{Y_2}{Y_n}, \dots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n} \right)$$

en fordeling som svarer til ordningen av $n-1$ uavhengige stokastiske variable som er uniforme på $(0,1)$.

Det betyr at Barlow-Proschan's testobservator,

$$W = \frac{Y_1}{Y_n} + \frac{Y_2}{Y_n} + \ldots + \frac{Y_{n-1}}{Y_n}$$

har samme fordeling som summen av $n-1$ uavhengige stokastiske variable som er uniforme på $(0,1)$. Dermed er

$$E(W) = \frac{n-1}{2}, \;\; Var(W) = \frac{n-1}{12}$$

siden forventning og varians i uniform fordeling på $(0,1)$ er henholdsvis $1/2$ og $1/12$. Merk til slutt at for n stor (antageligvis vil $n \geq 6$ være tilstrekkelig) er W tilnærmet normalfordelt på grunn av sentralgrense-teoremet. Dette gjør det enkelt å regne ut (tilnærmede) p-verdier for Barlow-Proschan's test.