Bokmål tekst

Faglig kontakt under eksamen:
John Tyssedal, telefon 73593534

Eksamen i fag SIF 5066 Forsøksplanlegging og anvendte statistiske metoder/Anvendt statistikk.

Tysdag 5. august 2003

Tid: 09.00-14.00

Hjelpemiddel: Alle skrevne og trykte. Enkel lommekalkulator
Tapir: Formler og tabeller i statistikk/Statistiske tabeller og formler

Sensuren faller 26. august.

Oppgave 1.

To typer fiskesnører, type A og type B, har samme dimensjon, og en skal undersøke strekkstyrken for de to typene.

Seks prøver av type A og syv prøver av type B ble valgte ut tilfeldig og de målte strekkstyrkene ble:

A (x_i): 6.0 5.9 6.4 6.8 5.6 7.2
B (z_i): 7.0 7.3 6.9 6.3 6.7 7.8 7.0

Anta at $X_1,\ldots,X_6$ er uavhengige og $N(\mu_A,\sigma^2)$ og at $Z_1,\ldots,Z_7$ er uavhengige og $N(\mu_B,\sigma^2)$. Det vil si at det er samme varians i begge de to utvalgene.

Utskrift fra en analyse med MINITAB er gitt nedenfor

Two-Sample T-Test and CI: A; B

```
Two-sample T  for A vs B

   N      Mean     StDev   SE Mean
A  6     6,317     0,601      0,25
B  7     7,000     0,469      0,18

Difference = mu A - mu B
Estimate for difference:  -0,683
95% CI for difference: (-1,336; -0,030)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = -2,30  P-Value = 0,042  DF = 11
Both use Pooled StDev = 0,533
```

a) En ønsker å undersøke om det er grunn til å anta at strekkstyrken for type A og type B er forskjellige. Formuler nullhypotese og alternativ. Sett opp uttrykket for testobservatoren. Forklar hva P-verdien betyr og gi konklusjonen på testen når signifikansnivået settes til 5%.

Ved bruk av variansanalyse for enveisgruppering gir MINITAB følgende utskrift.

One-way ANOVA: A; B

```
Analysis of Variance
Source     DF       SS        MS        F       P
Factor      1    1,509     1,509     5,30   0,042
Error      11    3,128     0,284
Total      12    4,637
                                  Individual 95% CIs For Mean
                                  Based on Pooled StDev
Level      N     Mean    StDev    ----+---------+---------+---------+--
A          6   6,3167   0,6014    (---------*---------)
B          7   7,0000   0,4690              (---------*---------)
                                  ----+---------+---------+---------+--
                                    6,00      6,50      7,00      7,50
Pooled StDev =  0,5333
```

b) Sett opp modellen som blir brukt. Forklar hvordan hypotesetesten i 1a) kan formuleres ved hjelp av en test på parametrer i variansanalysemodellen. Blir konklusjonen den samme? Hva blir estimatene for alle parametrene i variansanalysemodellen?

Testen i 1a) kan også utføres ved hjelp av en regresjonsanalyse. La y_i, $i=1,2,\cdots,6$ betegne x-observasjonene og y_i, $i=7,\cdots,13$. betegne z-observasjonene. Sett $t_i=0$ for $i=1,2,\cdots,6$ og $t_i=1$ for $i=7,\cdots,13$. Det vil si at vi har disse verdiene for y_i og t_i:

y_i :	6.0	5.9	6.4	6.8	5.6	7.2	7.0	7.3	6.9	6.3	6.7	7.8	7.0
t_i :	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Ved å anta modellen:

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 t_i$$

og gjøre en regresjonsanalyse med MINITAB får en følgende utskrift.

Regression Analysis: strekkstyrke versus type

```
The regression equation is
strekkstyrke = 6,32 + 0,683 type

Predictor        Coef    SE Coef       T       P
Constant       6,3167     0,2177   29,01   0,000
type           0,6833     0,2967    2,30   0,042

S = 0,5333      R-Sq = 32,5%     R-Sq(adj) = 26,4%

Analysis of Variance

Source          DF        SS        MS       F       P
Regression       1    1,5086    1,5086    5,30   0,042
Residual Error  11    3,1283    0,2844
Total           12    4,6369
```

c) Finn ut hvordan β_0 og β_1 kan uttrykkes ved hjelp av μ_A og μ_B. Hvordan vil du formulere testen i 1a) ved hjelp av en test på regresjonsmodellen? Hva blir konklusjonen? La Z være verdien av målt strekkstyrke for en ny prøve av fiskesnøre B. Finn et 95% prediksjonsintervall for Z. Hvorfor blir dette prediksjonsintervallet bredere enn konfidensintervallet for type B i oppgave 1b)?

Oppgave 2.

En bedrift var bekymret for antall ulykkestilfeller som fant sted. I første omgang ville de gjøre en liten studie basert på observasjoner for ulykker de siste 20 ukene. La X_i, være tallet på ulykker i uke i, $i=1,2,\cdots,20$. Anta at hver X_i er Poissonfordelt med en og samme parameter λ.

a) Forklar hvordan en kan konstruere et c - kontrollkort for antall ulykker hver uke. Lag c - kontrollkortet når ulykkestallene for de siste 20 ukene er som gitt nedenfor.

3 3 1 3 4 2 6 2 5 3 3 6 5 5 9 2 3 3 4 8

Vil du konkludere med at det høye ulykkestallet kan tilskrives spesielle årsaker eller er det mer nærliggende å tro at bedriften har et jevnt høyt ulykkestall?

Det viste seg at bedriften satt inne med et langt større tallmateriale. For hver av de 270 siste ulykkene hadde de også notert hvilken ukedag ulykken falt på. Dataene er gitt nedenfor:

Ukedag	Mandag	Tirsdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	I alt
Antall	65	43	48	41	73	270

La p_i være sannsynligheten for at en ulykke skal inntreffe på dag nr. i og la Y_i være antall ulykker som faller på dag nr. i, $i=1,2,\cdots,5$.

b) Hvilken fordeling er det rimelig å anta for hver Y_i og hvilken simultanfordeling er rimelig å anta for $Y_1,Y_2,\cdots,Y_5$? Grunngi svaret.
En vil undersøke om det er grunn til å tro at det er forskjell mellom ukedager når det gjelder sannsynligheten for at en ulykke skal inntreffe. Formuler hypotesetesten og utfør testen. Hva blir konklusjonen når signifikansnivået er satt til 5%?

Oppgave 3.

For å finne ut hvilken effekt tre faktorer har på en respons ble det utført fire enkeltforsøk. To nivåer ble valgt for hver faktor. Av grunner som vil bli klargjort senere skal vi kalle faktorene A, B og D. Resultatene fra de fire forsøkene er gitt nedenfor:

Eksperiment	A	B	D	y_i
1	-	-	+	85
2	+	-	-	75
3	-	+	-	93
4	+	+	+	145

I hele oppgaven skal vi anta at observasjonene er uavhengige og normalfordelte med samme varians σ^2.

a) Hvilken resolusjon har forsøket og hva blir konfunderingsmønsteret? Sett opp estimatorene for hovedeffektene og finn variansen til disse uttrykt ved σ^2. Regn ut estimatene for hovedeffektene.

En ingeniør ville studere tiden øyet bruker på å fokusere. Han fikk laget et apparat som gjorde det mulig å kontrollere flere faktorer. Faktorene som han plukket ut til å være med i forsøket var:

A: Syns-skarphet.
B: Avstand fra øyet til objektet.
C: Formen på objektet.
D: Lysstyrke.
E: Størrelse på objektet.

Forsøket ble egentlig utført som en kvartfraksjon av et 2^5 forsøk i de 5 faktorene der D ble satt lik AB samspillet og faktoren E ble satt lik AC samspillet. Resultatene fra forsøket og responsverdiene er gitt nedenfor.

Forsøk	A	B	C	D=AB	E=AC	Tid
1	-	-	-	+	+	85
2	+	-	-	-	-	75
3	-	+	-	-	+	93
4	+	+	-	+	-	145
5	-	-	+	+	-	84
6	+	-	+	-	+	78
7	-	+	+	-	-	95
8	+	+	+	+	+	142

b) Hvilken definerende relasjon har dette forsøket? Finn ut hvilke tofaktorsamspill som blir konfunderte med hovedeffektene og finn estimat for hovedeffektene av A og B.

De 5 andre kontrastene ble estimerte til: $l_C = 0.25$, $l_D = 28.75$, $l_E = -0.25$, $l_{BC} = -0.75$ og $l_{ABC} = -2.25$.

En bestemte seg for å utføre åtte forsøk til. Nivåkombinasjonene og responsverdiene er gitt nedenfor:

Forsøk	A	B	C	D	E	Tid
9	-	-	-	-	-	72
10	+	-	-	+	+	87
11	-	+	-	+	-	144
12	+	+	-	-	+	94
13	-	-	+	-	+	73
14	+	-	+	+	-	82
15	-	+	+	+	+	137
16	+	+	+	-	-	91

De estimerte kontrastene fra disse åtte enkeltforsøkene ble: $l_A' = -18$, $l_B' = 38$, $l_C' = -3.5$, $l_D' = 30$, $l_E' = 0.5$, $l_{BC}' = -1.5$, $l_{ABC}' = 2.5$.

c) Finn definerende relasjon til forsøket bestående av begge de to fraksjonene. Neglisjer trefaktor og høyere ordens samspill og finn ukonfunderte estimater av hovedeffektene fra disse 2 fraksjonene. Finn også ut hvilke tofaktorsamspill som kan estimeres ukonfundert. Grunngi svaret.

Løysingsforslag SIF 5066 / SIF 5068, 5. august 2003

Oppgåve 1

a)

$$H_0: \mu_A = \mu_B \qquad H_1: \mu_A \neq \mu_B$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Z}}{S_p\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{7}}}, \qquad S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{7}(Z_i - \bar{Z})^2}{11}$$

$$P\text{-verdien} = 2P(T \geq |t_{obs}|) = 2P(T \geq 2.30) = 2P(T \leq -2.$$

$$= P(|T| \geq |t_{obs}|)$$

Observert P-verdi = 0.042 < 0.05 => forkast H_0

b)

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \sim \begin{cases} N(0, \sigma^2) \\ \text{uavh.} \end{cases}$$

$$\sum m_i \alpha_i = 0$$

H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, H_1: minst ein av α_1 eller $\alpha_2 \neq 0$

$P(F_{1,11} \geq 5.3) = 0.042 < 0.05$ => forkast H_0

$$\hat{\mu} = \frac{6 \cdot \bar{X}_{..} + 7 \cdot \bar{Z}}{13} = \frac{6 \cdot 6.3167 + 7 \cdot 7}{13} = 6.685$$

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{X} - 6.685 = 6.317 - 6.685 = 0.368$$

$$\hat{\alpha}_2 = \bar{Z} - 6.685 = 7.001 - 6.685 = 0.315$$

$\hat{\sigma}^2 = 0.284$

c)

$\mu_A = E[Y_i \mid t_i = 0] = \beta_0$

$\mu_B = E[Y_i \mid t_i = 1] = \beta_0 + \beta_1$

$\mu_A - \mu_B = \beta_0 + \beta_1 - \beta_0 = \beta_1$

Test: $H_0: \beta_1 = 0$, $H_1: \beta_1 \neq 0$

$P(\hat{\beta}_1 \geq \hat{\beta}_{1,obs}) = 0.042 < 0.05 \Rightarrow$ forkast H_0.

Prediksjonsintervall $\bar{z} \pm t_{0.025,11} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{7}}$

$= 7 \pm 2.201 \cdot \sqrt{0.2844} \sqrt{\frac{8}{7}} = (5.75, 8.25)$

Eventuell: $\hat{y}_0 \pm t_{0.025,11} \cdot s \sqrt{1 + \frac{1}{13} + \frac{(1 - \frac{7}{13})^2}{6 \cdot (\frac{7}{13})^2 + 7 \cdot (\frac{6}{13})^2}}$

$= \hat{y}_0 \pm 2.201 \cdot \sqrt{0.2844} \sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{13} + \frac{6}{91}}_{\frac{1}{7}}}$

For SIF 5066

$\frac{\hat{\beta}}{SD\tilde{\beta}} = \frac{\sum (t_i - \bar{t}) Y_i}{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2 \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{\sum (t_i - \bar{t})^2}}} = \frac{\frac{6}{13} \cdot 7 \bar{z} - \frac{7}{13} \cdot 6 \bar{x}}{\hat{\sigma} \sqrt{6 \cdot (\frac{7}{13})^2 + 7 \cdot (\frac{6}{13})^2}}$

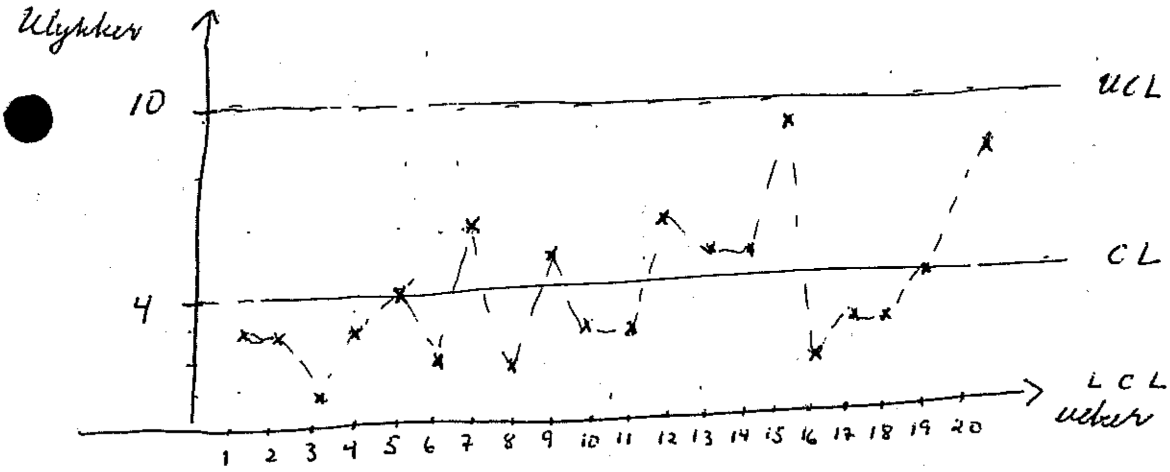
$= \frac{42 \bar{z} - 42 \bar{x}}{s_p \sqrt{42 \cdot 7 + 42 \cdot 6}} = \frac{\bar{z} - \bar{x}}{s_p \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{7}}} = T$

Oppgåve 2

a) c kort: $\hat{\lambda} \pm 3\sqrt{\hat{\lambda}} = \bar{X} \pm 3\sqrt{\bar{X}}$

$$\bar{X} = 4 \Rightarrow \begin{cases} UCL = 4 + 3 \cdot 2 = 10 \\ LCL = 4 - 3 \cdot 2 = -2 \Rightarrow 0 \\ CL = 4 \end{cases}$$

c-kort.



Ingen observasjonar fell utanfor kontrollgrensene. Synes ikkje å vere spesielle årsaker, men svak antydning av trend.

b) For Y_1

270 vanh. forsøk

Reg måndag / ikkje måndag

P(måndag) = 0.2

Tilsvarande for $Y_1, \ldots, Y_5$ o: Rimeleg at Y_1 er binomisk fordelt og $Y_2, \ldots, Y_5$ det same.

Disjunkte hendingar $\Rightarrow$ $Y_1, \ldots, Y_5$ simultant multinomisk fordelt.

$H_0: \ p_1 = p_2 = \cdots = p_5 = 0.2 \qquad H_1: \text{ minst ein} \neq 0.2.$

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{(Y_i - E(Y_i))^2}{E(Y_i)} = \frac{(65-54)^2}{54} + \frac{(43-54)^2}{54} + \frac{(48-54)^2}{54} + \frac{(41-54)^2}{54}$$

$$+ \frac{(73-54)^2}{54} = 14.96 > \chi^2_{4,\,0.05} = 9.49$$

$\Rightarrow$ forkast H_0.

Oppgåve 3

a) $D = AB \Rightarrow I = ABD \Rightarrow$ resolusjon 3

Konfunderingsmönster

$A = A + BD$

$B = B + AD$

$D = D + AB$

$$\hat{A} = \frac{Y_2 + Y_4 - (Y_1 + Y_3)}{2}$$

$$\hat{B} = \frac{Y_3 + Y_4 - (Y_1 + Y_2)}{2}$$

$$\hat{D} = \frac{Y_1 + Y_4 - (Y_2 + Y_3)}{2}$$

$$Var(\hat{A}) = Var(\hat{B}) = Var(\hat{D}) = \frac{4\sigma^2}{4} = \sigma^2$$

$$l_A = \frac{145 + 75 - (93 + 85)}{2} = 21$$

$$l_B = \frac{145 + 93 - (75 + 85)}{2} = 39$$

$$l_D = \frac{145 + 85 - (75 + 93)}{2} = 31$$

b)

$$I = ABD = ACE = BCDE$$

$$A = A + BD + CE + \cdots$$

$$B = B + AD + \cdots$$

$$C = C + AE + \cdots$$

$$D = D + AB + \cdots$$

$$E = E + AC + \cdots$$

$$l_A = \frac{21}{2} + \frac{78+142-(95+84)}{4} = 20.75$$

$$l_B = \frac{39}{2} + \frac{(95+142)-(78+84)}{4} = 38.25$$

c) For den siste fraksjonen har vi:

$I = -ABD = -ACE = BCDE$ slik at definerande relasjon for dei 16 forsøka er: $I = BCDE$

For dei 8 siste forsøka har vi:

$$\left.\begin{aligned} A &= A - BD - CE \\ B &= B - AD \\ C &= C - AE \\ D &= D - AB \\ E &= E - AC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{20.75-18}{2} = 1.38 \\ \hat{B} &= \frac{38.25+38}{2} = 38.13 \\ \hat{C} &= \frac{0.25-3.5}{2} = -1.63 \\ \hat{D} &= \frac{28.75+30}{2} = 29.38 \\ \hat{E} &= \frac{-0.25+0.5}{2} = 0.13 \end{aligned}$$

Forsøket er ekvivalent med eit forsøksopplegg der ein snarar forteiknet for faktor A ⇒ alle tofaktorsamspel der A inngår kan estimerast ukonfunderte o: AB, AC, AD og AE. Dette kan og sjåast frå definerande relasjon $I = BCDE$ som ⇒ $BC = BC + DE$, $BD = BD + CE$, $BE = BE + CD$