Bokmåls tekst

Faglig kontakt under eksamen:
John Tyssedal, telefon 73593534

Eksamen i fag SIF 5066 Anvendt statistikk

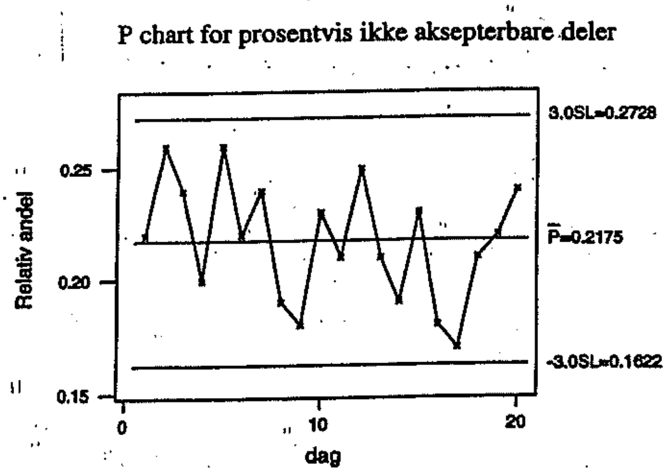
Tirsdag 28. mai 2002
Tid: 09.00-14.00

Hjelpemidler: Alle skrevne og trykte hjelpemidler. Enkel lommekalkulator
Tapir: Formler og tabeller i statistikk/Statistiske tabeller og formler

Sensuren faller 18. juni

Oppgave 1.

En produsent av plastikkdeler hadde problemer med kvaliteten på et av produktene sine. Det ble derfor leid inn statistisk konsulenthjelp for å finne årsaker til problemene. Ut i fra gitte spesifikasjonsgrenser, ble det for hver dag i 20 dager regnet ut hvor mange plastikk-deler som ikke kunne aksepteres i prosent. Et kontrollkort for disse dataene er synt nedenfor.



La X_i være tallet på deler som ikke kan aksepteres på dag nummer i, $i = 1,\ldots,20$, og la Y_i vere samme tallet i prosent. Du kan i denne oppgaven anta at det blir produsert 500 plastikkdeler hver dag.

a) Hva må være oppfylt for at hver X_i, $i = 1,2,\ldots,20$ skal være binomisk fordelt? Gjør rede for hvordan kontrollkortet er konstruert, og kommenter hva du synes ser ut til å være problemet med prosessen.

Tallet på deler som ikke møtte spesifikasjonskravene, måtte ned. I første omgang ble det fokusert på trykkverdien som ble brukt i framstillingsprosessen. Det ble bestemt å utføre et forsøk som skulle gå over 10 dager der en skulle prøve ut to innstillinger av trykket i 5 dager hver. Målet var å finne ut om de to innstillingene ga forskjellige verdier for prosentvis tall av ikke aksepterbare deler. De innsamlede verdiene er gitt nedenfor:

Trykk	Prosentvis tal ikke aksepterbare deler.				
40	15	18	14	16	20
50	22	18	20	17	16

b) Forklar hvordan et slikt forsøk bør være randomisert. Dataene ble analysert med MINITAB og utskrift fra programpakken er synt nedenfor.

Two Sample T-Test and Confidence Interval

```
Two sample T for prosentvis ikke aksepterbare deler

Trykk          N      Mean      StDev     SE Mean
40             5     16.60       2.41        1.1
50             5     18.40       2.51        1.1

95% CI for mu (1) - mu (2): ( -5.4,  1.8)
T-Test mu (1) = mu (2) (vs not =): T = -1.16  P = 0.28  DF = 8
Both use Pooled StDev = 2.46
```

Formuler nullhypotesen og alternativ hypotese. Hvilke antagelser bygger en slik test på? Er disse forsvarlige å bruke her? Sett opp uttrykket for testobservator. Hva blir konklusjonen når signifikansnivået er 5%? Grunngi svaret.

Det ble bestemt å utføre et mer omfattende forsøk der en også tok med temperatur. De innsamlede verdiene er gitt nedenfor:

	Temperatur				
Trykk	40	50	60	70	80
10	15	14	7	8	21
20	13	4	6	6	12
30	16	6	5	3	14
40	14	5	4	9	18
50	32	13	2	1	30

c) Hva slags forsøk er dette? Hvordan bør det være randomisert? Utskrift fra programpakken MINITAB er synt nedenfor.

Analysis of Variance (Balanced Designs)

```
Factor      Type  Levels Values
trykk       fixed      5     10     20     30     40     50
temp        fixed      5     40     50     60     70     80

Analysis of Variance for prosent ikke aksepterbare deler

Source       DF          SS          MS        F      P
trykk         4      193.84       48.46     1.91  0.157
temp          4      947.44      236.86     9.35  0.000
Error        16      405.36       25.34
Total        24     1546.64


Means

trykk     N  prosent ikke aksepterbare deler
10        5          13.000
20        5           8.200
30        5           8.800
40        5          10.000
50        5          15.600

temp     N  prosent ikke aksepterbare deler
40       5          18.000
50       5           8.400
60       5           4.800
70       5           5.400
80       5          19.000
```

Sett opp modell, gjør de nødvendige antagelser og finn ut hvilke faktorer som har betydning når signifikansnivået er valgt til 5%. Føreta også en test for å vurdere om kvaliteten er betre når temperaturen er 60^0 enn når den er 80^0. Bruk 5% nivå.

Både trykk og temperatur kan varieres på en kontinuerlig skala, og en var interessert i å finne optimale innstillinger for disse. Det ble derfor utført en regresjonsanalyse med Y_i som responsverdier og med trykk og temperatur som regresjonsvariabler.

d) Vil du ut i fra å studere de utregnede gjennomsnittene foreslå en modell med bare 1. ordens ledd eller er det naturlig å ta med 2. ordens ledd også i en slik modell? Nedenfor er det synt utskrift av en "best subsets" regresjon der en har med 1. og 2. ordens ledd i regresjonsmodellen. Hviken modell vil du velge? Grunngi svaret. Hvor meget av variasjonen i kvalitetsdataene er forklart med denne modellen? Hvorfor har modellen med 5 forklaringsvariable størst R^2.

Best Subsets Regression

Respons er prosent ikkje akseptable deler

Vars	R-Sq	Adj. R-Sq	C-p	s	trykk	temp	trykkxtrykk	tempxtemp	trykkxtemp
1	3.5	0.0	44.4	8.0566			X		
1	1.6	0.0	45.7	8.1351	X				
2	59.2	55.4	8.7	5.3586		X		X	
2	12.2	4.2	40.6	7.8584	X		X		
3	62.6	57.3	8.3	5.2463		X	X	X	
3	60.7	55.1	9.6	5.3773	X	X		X	
4	71.3	65.6	4.4	4.7099	X	X	X	X	
4	68.9	62.6	6.1	4.9062		X	X	X	X
5	72.0	64.6	6.0	4.7762	X	X	X	X	X

En regresjonsanalyse der 1. ordens og kvadratiske ledd for trykk og temperatur er med i modellen er gitt nedenfor.

Regression Analysis

```
The regression equation is
pros iak = 143 - 4.35 temp + 0.0361 tempxtemp - 0.847 trykk
           + 0.0153 trykkxtrykk
```

Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	143.21	20.07	7.14	0.000
temp	-4.3471	0.6788	-6.40	0.000
tempxtemp	0.036143	0.005629	6.42	0.000
trykk	-0.8471	0.3443	-2.46	0.023
trykkxtrykk	0.015286	0.005629	2.72	0.013

S = 4.710 R-Sq = 71.3% R-Sq(adj) = 65.6%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	4	1102.97	275.74	12.43	0.000
Residual Error	20	443.67	22.18		
Total	24	1546.64			

Source	DF	Seq SS
temp	1	0.50
tempxtemp	1	914.41
trykk	1	24.50
trykkxtrykk	1	163.56

e) Har trykk signifikant forklaringsgrad i denne modellen? Bruk 5% nivå og grunngi svaret. (Hint. Du kan ha nytte av utskriften i 1 d). Bruk modellen ovenfor til å finne innstillinger av trykk og temperatur som gir lavest estimert forventet tall av prosentvis ikke aksepterbare plastikk deler. Hva blir nå estimert prosentvis tal ikke aksepterbare deler med denne innstillingen?

La x_o være vektoren der 1. element er 1 og de 4 andre elementene er de innsatte verdiene for forklaringsvariablene som gir minimumsverdi for estimert respons, og la X være designmatrisen. Du får opplyst at $x_0^T(X^T X)^{-1}x_0 = 0.153$. Finn et 95% prediksjonsintervall for prosentvis tal av ikke aksepterbare deler ved å anta at responsverdiene Y_i er normalfordelte. Kommenter prediksjonsintervallet.

Oppgave 2

Et 2^{4-1} forsøk ble utført for å komme fram til klær som kunne gi brannmenn betre vern ved brannslukking. To typer stoff, to typer brannslukkingsmidler, om stoffet var rent eller ikke i tillegg til to måter å sette fyr på stoffet ble prøvt ut. De 4 faktorene skal vi heretter kalle A, B, C og D som gitt nedenfor.

A: Type stoff
B: Type brannslukkingsmiddel
C: Vask eller ikke vask
D: Hvordan stoffet ble satt fyr på.

Responsen var hvor mange tommer av stoffet som ble brent av et stykke med standard mål. Resultatet fra forsøket er gitt nedenfor:

A	B	C	D	Y
-1	-1	-1	1	40
1	-1	-1	-1	31
-1	1	-1	-1	45
1	1	-1	1	25
-1	-1	1	-1	39
1	-1	1	1	25
-1	1	1	1	50
1	1	1	-1	32

a) Hva blir definerende relasjon (definerende kontrast) for dette forsøket? Hvilken resolusjon har det? Finn estimat for hovedeffekten av faktor A og samspillseffekten AB mellom faktor A og faktor B. Hvorfor er det lettere å vurdere om det er en hovedeffekt av faktor A enn om det er samspill mellom faktor A og faktor B?

Det ble bestemt å utføre den andre halvfraksjonen også. Resultatet fra dette forsøket ble:

A	B	C	D	Y
-1	-1	-1	-1	42
1	-1	-1	1	30
-1	1	-1	1	50
1	1	-1	-1	29
-1	-1	1	1	40
1	-1	1	-1	28
-1	1	1	-1	46
1	1	1	1	23

Nedenfor er det synt noen estimeringresultater fra det fullstendige 2^4 forsøket. Du kan i første omgang anta at det ikke er noen blokkeffekter mellom fraksjonene.

Fractional Factorial Fit

Estimated Effects and Coefficients for tommer (coded units)

Term	Effect	Coef	Sum of Squares
Constant		35.938	
A	-16.125	-8.062	1040.06
B	3.125	1.562	39.06
C	-1.125	-0.562	5.06
D	-1.125	-0.562	5.06
A*B	-4.375	-2.188	76.56
A*C	-0.625	-0.313	1.56
A*D	-3.125	-1.563	39.06
B*C	1.625	0.813	10.56
B*D	0.125	0.063	0.06
C*D	-0.625	-0.312	1.56
A*B*C	0.625	0.312	1.56
A*B*D	-2.375	-1.187	22.56
A*C*D	-1.125	-0.562	5.06
B*C*D	-0.875	-0.438	3.06
A*B*C*D	0.125	0.063	0.06

Analysis of Variance for tommer (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	4	1089.25	1089.25	272.312	*	*
2-Way Interactions	6	129.38	129.38	21.563	*	*
3-Way Interactions	4	32.25	32.25	8.062	*	*
4-Way Interactions	1	0.06	0.06	0.063	*	*
Residual Error	0	0.00	0.00	0.000		
Total	15	1250.94				

b) Hva blir estimatet for hovedeffekten av faktor A basert på de siste 8 forsøkene? Anta at alle 3. ordens og høyere ordens samspill er 0. Bruk utskriften til å finne et estimat for variansen til enkeltobservasjonene. Finn så ut hvilke effekter som er signifikante på 5% nivå og gi en tolkning av de estimerte effektene.

c) Om tøyet er vasket eller ikke synes ikke å ha betydning og forsøket kan derfor betraktes som et gjentak av et 2^3 forsøk i faktorene A, B og D. Bruk informasjonen i utskriften føre punkt 2b) til å finne et nytt estimat for variansen til enkeltobservasjonene. Vurder på nytt om dette påvirker hvilke effekter og samspill som er signifikante. Ville en eventuell blokkeffekt mellom fraksjonene påvirke konklusjonen din i særleg grad? Grunngi svaret.

Løysingsforslag SIF 5066 Våren 2002

Oppgåve 1.

a) 500 uavh. forsøk
Reg akseptabel/ikkje akseptabel i kvart forsøk
P(akseptabel) er konstant i kvart forsøk

Kontrollkort:

La $\hat{p}_i = \frac{Y_i}{100}$, $i = 1, 2, \ldots, 20$

La $\bar{p} = \sum_{i=1}^{20} \frac{\hat{p}_i}{20}$

$CL = \bar{p}$, $UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{500}}$, $LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{500}}$

Problemet ser ut til å vere ein relativ stor andel ikkje akseptable deler.

b) Ein kan legge 5 trykkverdiar på 40 og 5 trykkverdiar på 50 i ein boks og for kvar dag trekke ut den trykkverdien som skal brukast.

H_0: $\mu_{40} = \mu_{50}$ H_1: $\mu_{40} \neq \mu_{50}$

$U_i \sim N(\mu_{40}, \sigma^2)$ og uavh.
$V_i \sim N(\mu_{50}, \sigma^2)$, uavh og uavh av U_i, $i = 1, \ldots, 5$

Med $p \simeq 0.2$ vil både np og $n(1-p)$ bli mykje større enn 5, slik at det er forsvarleg å tilnærme med normalfordeling, men bør vere observant på at variansen avheng av p.

$$T = \frac{\bar{u} - \bar{v}}{s_p \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}} \qquad s_p^2 = \frac{\Sigma(U_i - \bar{u})^2 + \Sigma(V_i - \bar{v})^2}{8}$$

P-verdien $= 0.28$, slik at vi har ingen grunn til å forkaste H_0.

c)

To vegs variansanalyse med faste effektar.
Fullstendig randomisering av alle dei 25 nivåkombinasjonane

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \left. \begin{matrix} N(0, \sigma^2) \\ \text{uavh.} \end{matrix} \right.$$

effekt av trykknivå i — effekt av temperaturnivå j

H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ $\qquad$ H_1: minst ein $\alpha_i \neq 0$, minst ein $\beta_j \neq 0$

På 5% nivå er det berre temperatur som har p-verdi mindre enn 0.05.

$H_0: \mu_{60} = \mu_{80} \qquad H_1: \mu_{60} < \mu_{80}$

$$T_{obs} = \frac{4.8 - 19}{\sqrt{25.34}\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}} = -4.46 << -t_{0.05;16} = -1.746 \Rightarrow \text{forkast } H_0,$$

og påstå at kvaliteten er betre når temperaturen er 60°.

d) Vi observerer at gjennomsnitta er høge for små og store verdiar for både trykk og temperatur. For verdiar imellom er gjennomsnitta lågare. Dette indikerer iallefall at kvadratiske ledd bør vere med.

Modellen med dei 4 regresjonsvariable temp, temp^2, trykk og trykk^2 har minst verdi for Mallows-C_p og størst verdi for R^2-justert og dermed og minst verdi for $\hat{\sigma}^2$.

R^2 for denne modellen er 0.713 som betyr at 71.3 % av variasjonen er forklart.
R^2 vil alltid auke når vi føyer til regresjonsvariable

e) La $\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1\, temp + \beta_{11}\, temp^2 + \beta_2\, trykk + \beta_{22}\, trykk^2$

$H_0: \beta_2 = \beta_{22} = 0$ $\quad H_1$: minst ein av dei $\neq 0$

$$F = \frac{\dfrac{SSR(\beta_1, \beta_{11}, \beta_2, \beta_{22} \mid \beta_0) - SSR(\beta_1, \beta_{11} \mid \beta_0)}{2}}{\dfrac{SSE}{20}}$$

$$= \frac{\dfrac{1102.97 - 1546.64 \cdot 0.592}{2}}{22.18} = 4.24 > 3.49 = f_{0.05,2,20} \Rightarrow$$

signifikant forklaringsgrad.

$\hat{Y} = 143.2 - 4.35\, temp + 0.0361\, temp^2 - 0.847\, trykk + 0.0153\, trykk^2$

$\frac{d\hat{Y}}{dt} = -4.35 + 0.0722\,t = 0 \Rightarrow t = 60.25$

$\frac{d\hat{Y}}{dP} = -0.847 + 0.0306\,P = 0 \Rightarrow P = \frac{0.847}{0.0306} = 27.7$

$\hat{Y}(60.25, 27.7) = 143.2 - 4.35 \cdot 60.25 + 0.0361 \cdot 60.25^2 - 0.847 \cdot 27.7 + 0.0153 \cdot 27.7^2$
$= 0.44$ (vs = 0.735 (MINITAB)) avheng av avrundingsfeil.

Prediksjonsintervall: $0.784 \pm \underbrace{\overset{t_{0.025,20}}{2.086} \cdot \sqrt{22.18 \cdot 1.153}}_{10.55} = -10.11,\ 10.99$

Intervallet inneheld negative verdiar. Normalfordelinga passer dårleg ved låg prosent ikkje akseptable deler.

Oppgåve 2

a) $I = -ABCD \Rightarrow$ resolusjon IV

$$\hat{A} = \frac{31+25+25+32}{4} - \frac{40+45+39+50}{4} = 28.25 - 43.5 = -15.25$$

$$\hat{AB} = \frac{40+25+39+32}{4} - \frac{31+45+25+50}{4} = 34 - 37.75 = -3.75$$

A er konfundert med trefaktorsamspel som er normalt er små.
AB er konfundert med eit tofaktorsamspel som ikkje like ofte er negligerbart.

b) $\hat{A} = 2\cdot -16.125 + 15.25 = -32.25 + 15.25 = -17$

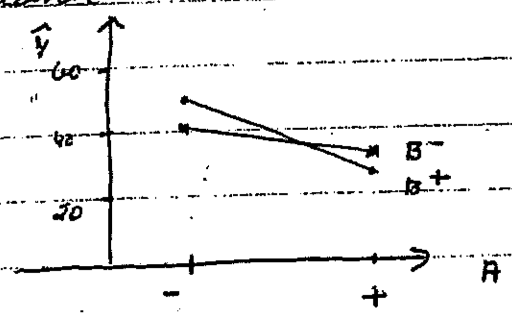
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{4(\hat{ABC} + \hat{ABD} + \hat{ACD} + \hat{BCD} + \hat{ABCD})}{5} = \frac{32.31}{5} = 6.46$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2_{eff} = \frac{6.46}{4} = 1.615$$

Kritisk verdi $= t_{0.025,5}\cdot \hat{\sigma}_{eff} = 2.571\cdot\sqrt{1.615} = 3.27$

$\Rightarrow$ A og AB er signifikante

B \ A	−	+
−	40.25	28.5
+	47.75	27.25



Størst effekt av stofftype får vi ved det brannslukkingsmiddelet som svarar til høgt nivå. Best vern når A og B er på høgt nivå.

c) $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{4\hat{C}^2 + 4\hat{AC}^2 + 4\hat{BC}^2 + 4\hat{CD}^2 + 4\hat{ABC}^2 + 4\hat{ACD}^2 + 4\hat{BCD}^2 + 8\cdot\widetilde{ABCD}^2}{8}$

$= \dfrac{5.06 + 1.56 + 10.56 + 1.56 + 1.56 + 5.06 + 3.06 + 0.06}{8} = \dfrac{28.48}{8} = 3.56$

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2_{eff} = \dfrac{3.56}{4} = 0.89$

kritisk verdi $= t_{0.025,8}\cdot\sqrt{0.89} = 2.306\cdot\sqrt{0.89} = 2.18$

$\Rightarrow$ A, B, AB, AD, og ABD er signifikante.

Ved å rekne med blokkeffekt vil

$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{28.42}{7} = 4.06$ og $\hat{\sigma}^2_{eff} = 1.015 \Rightarrow$ kritisk verdi $= 2.306\sqrt{1.015} = 2.3$.

som gjer ingen forandring i signifikans av effektar.