Eksempel på approksimasjon av forventning og varians.

<u>n=1:</u> $Y = g(X)$ Kjenner $E(X) = \mu$
$Var(X) = \sigma^2$

Ønsker å approksimere
$E(Y)$ og $Var(Y)$.

Ide: Vet at hvis $Y = aX + b$
er $E(Y) = a\mu + b$
$Var(Y) = a^2\sigma^2$ (*)

Vil nå approksimere Y ved Z som er gitt ved en 1. ordens Taylorutvikling $x = \mu$:

$Y = g(X)$

(**) $Z = g(\mu) + g'(\mu)(X - \mu) \approx g(X)$

Dette er en god tilnærming hvis σ^2 er liten, siden vi da vet at X vil falle nær μ.

Approksimasjonen gjøres ved

$E(Y) \approx E(Z) = g(\mu)$ [siden $E(X) = \mu$]
$Var(Y) \approx Var(Z) = [g'(\mu)]^2\sigma^2$ der vi brukte (*) på formelen (**)

<u>n=2</u>. $Y = g(X_1, X_2)$; $E(X_i) = \mu_i$, $Var(X_i) = \sigma_i^2$

Taylor: $$Z = g(\mu_1,\mu_2) + \frac{\partial g(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_1}(X_1 - \mu_1)$$
$$+ \frac{\partial g(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_2}(X_2 - \mu_2)$$

Formlene under "Lineærkombinasjoner" s. 34 i TABELLER OG FORMLER ..

gir

$$E(Y) \approx E(Z) = g(\mu_1,\mu_2)$$

$$Var(Y) \approx Var(Z) = \left[\frac{\partial g(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_1}\right]^2 \cdot \sigma_1^2$$
$$+ \left[\frac{\partial g(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_2}\right]^2 \cdot \sigma_2^2$$
$$\boxed{+ 2 \frac{\partial g(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_1} \cdot \frac{\partial g(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_2} Cov(X_1, X_2)}$$

der leddet i $\boxed{\quad}$ ikke er med hvis det antas at X_1, X_2 er uavhengige.

Eksempel:

$$Y = \frac{X_1}{X_2} = g(X_1, X_2)$$

Da er
$$\begin{cases} g(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2} \\ \frac{\partial g(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_1} = \frac{1}{\mu_2} \\ \frac{\partial g(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} = -\frac{\mu_1}{\mu_2^2} \end{cases}$$

så

$$Z = \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_2}(X_1 - \mu_1) - \frac{\mu_1}{\mu_2^2}(X_2 - \mu_2)$$

og

$$E(Z) = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$Var(Z) = \frac{1}{\mu_2^2}\sigma_1^2 + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^4}\sigma_2^2$$

$$\boxed{-\frac{2\mu_1}{\mu_2^3} Cov(X_1, X_2)}$$

I Simuleringene s. 56 / 57 i pdf-filen er

s. 56 $\begin{cases} X_1 \sim N(100, 2^2) \\ X_2 \sim N(20, 1^2) \end{cases}$ uavhengige

så vi får fra formelen på forrige side

$$Var\left(\frac{X_1}{X_2}\right) \approx \frac{1}{20^2} \cdot 2^2 + \frac{100^2}{20^4} \cdot 1^2$$

$$= \underline{0.0725} \quad \text{(simulert 0.0712)}$$

s. 57 $\begin{cases} X_1 \sim N(100, 5^2) \\ X_2 \sim N(20, 2^2) \end{cases}$

$$Var\left(\frac{X_1}{X_2}\right) \approx \frac{1}{20^2} \cdot 5^2 + \frac{100^2}{20^4} \cdot 2^2$$

$$= \underline{0.3125} \quad \text{(simulert 0.3264)}$$

NB. Simuleringene er basert på å trekke 100 par av (X_1, X_2) og slik beregne 100 verdier av $Y = \frac{X_1}{X_2}$. Den empiriske varians for Y-ene vil da konvergere mot den *eksakte* variansen som vi ønsker å beregne.