ST0103 Brukerkurs i statistikk
Høst 2016

Forelesning 2, 26.8.2016

3.2 Sannsynligheten for en hendelse

Sannsynligheten for en hendelse sier oss "hvor ofte" vi forventer at hendelsen inntreffer, *dvs. den forventede relative frekvens av hendelsen*.

Sannsynligheter kan finnes på tre måter.

— **Empirisk**, dvs. ved å gjøre forsøk.

— **Teoretisk**, dvs. ved å regne.

— **Subjektivt**, dvs. ved (kvalifisert) gjetning.

3.2.1 Uniform sannsynlighetsmodell

Sannsynlighet Hvis alle utfall i S er like sannsynlige, er

$$\textit{teoretisk sannsynlighet for } A = \frac{\textit{antall utfall som gir } A}{\textit{totalt antall utfall i } S}$$

dvs.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Eksempel: Kast en mynt

Utfall	Krone (H) eller Mynt (T)
Utfallsrom	$S = \{H, T\}$ og $n(S) = 2$
Hendelse	Ønsker for eksempel sannsynligheten for hendelsen $A =$ Krone dvs. H. Da er $n(A) = 1$.

$$\text{Teoretisk sannsynlighet for } A = \frac{\text{antall utfall som gir } A}{\text{totalt antall utfall i } S}$$

dvs.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

Eksempel: Kast en terning

Utfall	1,2,3,4,5 eller 6 øyne
Utfallsrom	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og $n(S) = 6$
Hendelse	Ønsker for eksempel sannsynligheten for hendelsen $A =$ "minst 5 øyne" = $\{5, 6\}$. Da er $n(A) = 2$.

$$\text{Teoretisk sannsynlighet for } A = \frac{\text{antall utfall som gir } A}{\text{totalt antall utfall i } S}$$

dvs.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Eksempel: Kast to terninger

Utfallsrommet S har $n(S) = 6 \times 6 = 36$ og kan skrives opp i et **gitter**. Merk at alle de 36 mulige utfallene er like sannsynlige.

		Andre terning					
		1	2	3	4	5	6
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
Første	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
terning	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

La $A =$ "sum øyne er 5". Da er

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(\{(4,1),(3,2),(2,3),(1,4)\})}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Oppgave: Kast to terninger og la den interessante hendelsen være A at sum øyne er lik 5.

Forklar at dersom utfallet defineres som “sum antall øyne”, kan utfallrommet skrives

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Hvorfor kan vi ikke da slutte at

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{11} \qquad ?$$

(Husk at vi fikk $\frac{1}{9}$ tidligere.)

Egenskaper ved sannsynligheter

Egenskap 1 for sannsynligheter: *En sannsynlighet er alltid et tall mellom 0 og 1*, dvs.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Sannsynligheten er null dersom hendelsen ikke kan inntreffe.
- Sannsynligheten er 1 dersom hendelsen inntreffer hver gang.
- Ellers er den gitt ved en forventet relativ frekvens, dvs. forventet antall ganger A vil inntreffe i n forsøk dividert på n (som blir et tall mellom 0 og 1).

Egenskap 2 for sannsynligheter: *Summen av sannsynlighetene for alle mulige utfall s i et eksperiment er eksakt lik 1*, dvs.

$$\Sigma P(s) = 1$$

Eksempel: Kast én terning. Da er $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$.

$$\Sigma P(s) = 1/6 + 1/6 + \ldots + 1/6 = 1$$

Oppgave: Kast to terninger og legg sammen tallene. Hvilke(n) sum(mer) er mest sannsynlig(e)?

		Andre terning					
		1	2	3	4	5	6
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
Første	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
terning	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

3.3.3 De viktigste regnereglene

Komplementet til en hendelse A: Mengden av alle utfall som ikke hører til A. Skrives $\bar{A}$ (leses 'A-komplement')

Fortolkning: $\bar{A}$ er hendelsen at "A ikke inntreffer".

Eksempel: Kast én terning og la A betegne "partall antall øyne". Da er $\bar{A}$ hendelsen at antall øyne er et oddetall.

Fordi A og $\bar{A}$ tilsammen dekker hele utfallsrommet, har vi at

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Dette gir **komplementregelen:** *Sannsynligheten for komplementet til A er lik 1 minus sannsynligheten for A, dvs.*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Alle hendelser har et komplement. Iblant er det enklere å beregne sannsynligheten for $\bar{A}$ enn for A.

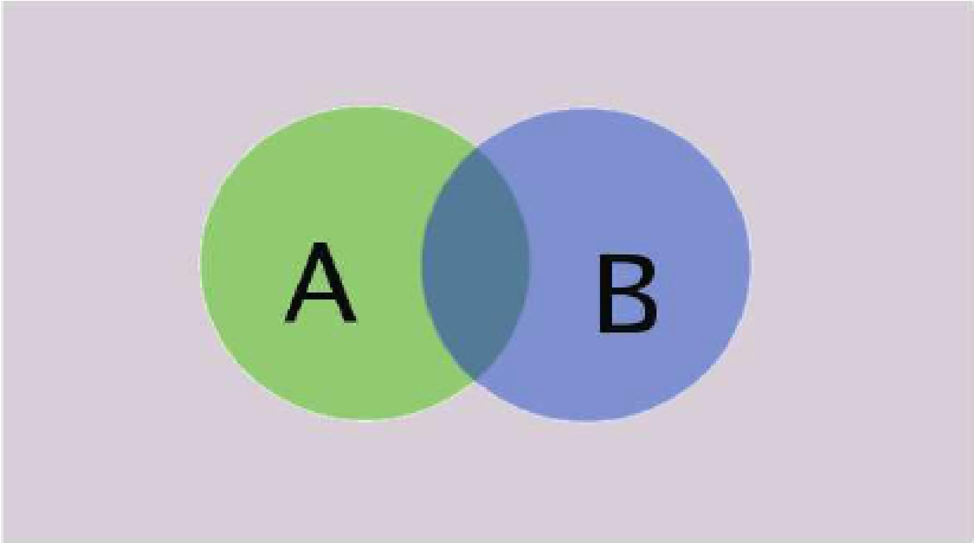
Eksempel: Kast to terninger. Hva er sannsynligheten for at summen blir større enn eller lik 4?

A=summen er større enn eller lik 4

$\bar{A}$=summen er mindre enn eller lik 3

$$
\begin{aligned}
P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(S)} \\
= 1 - \frac{n(\{(1,1),(1,2),(2,1)\})}{n(S)} \\
= 1 - \frac{3}{36} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}
\end{aligned}
$$

Illustrasjon av den generelle addisjonsregel



$$P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ og } B)$$

Eksempel

Kast to terninger. Hva er sannsynligheten for at summen er 10 (hendelse A) eller at terningene viser to like (hendelse B)?

$$P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ og } B) = \frac{3}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

		Andre terning					
		1	2	3	4	5	6
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
Første	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
terning	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

siden hendelsen "*A* og *B*" her svarer til det ene utfallet $(5, 5)$.