ST0101 2007H – løsningsskisse

1 a. $P(X<10{,}5)=P\left(\frac{X-12}{2}<\frac{10{,}5-12}{2}\right)=P(Z<-0{,}75)=\underline{0{,}2266}$ $(Z\sim N(0,1))$ (tabell D.3)

b. La utbyttene være X_1 og X_2. $P(X_1<10{,}5 \cup X_2<10{,}5)=1-P(X_1\geq 10{,}5)P(X_2\geq 10{,}5)$
$=1-(1-0{,}2266)^2=\underline{0{,}402}$

c. Antall ganger, Y, lampa lyser er binomisk fordelt med parametre $n=100$ og $p=0{,}2266$. $EY=100\cdot 0{,}2266=22{,}66$, $\mathrm{Var}\,Y=100\cdot 0{,}2266(1-0{,}2266)=17{,}53$.
$P(Y\geq 25)=P(Y\geq 24{,}5)=P\left(\frac{Y-22{,}66}{\sqrt{17{,}53}}\geq \frac{24{,}5-22{,}66}{\sqrt{17{,}53}}\right)\approx P(Z\geq 0{,}44)=1-0{,}6700=\underline{0{,}33}$
$(Z\sim N(0,1))$ (tabell D.3) ["Riktig" verdi med to desimaler: 0,32]

d. Samlet utbytte $S\sim N(12n, 2\sqrt{n})$. Vi ønsker $P(S\geq 100)\geq 0{,}999$, dvs.
$P\left(\frac{S-12n}{2\sqrt{n}}\geq \frac{100-12n}{2\sqrt{n}}\right)\geq 0{,}999$, dvs. $P\left(Z\geq \frac{100-12n}{2\sqrt{n}}\right)\geq 0{,}999$, der
$Z\sim N(0,1)$. $P(Z\geq -3{,}090)=0{,}999$ (tabell D.3), og $\frac{100-12n}{2\sqrt{n}}=-3{,}09$ gir
$6n-3{,}09\sqrt{n}-50=0$, dvs. $6(\sqrt{n})^2-3{,}09\sqrt{n}-50=0$, $\sqrt{n}=\frac{3{,}09\pm\sqrt{3{,}09^2-4\cdot 6\cdot(-50)}}{2\cdot 6}$
$=3{,}16$ (eneste positive løsning), $n=3{,}16^2=9{,}96$. Så $n\geq \underline{10}$ gir
$P(S\geq 100)\geq 0{,}999$.

2 a. Vi kan se på dette som en binomisk forsøksrekke (uten et fast antall delforsøk – hvert delforsøk ender med jente (sannsynlighet 1/2) eller gutt (sannsynlighet 1/2), og vi må anta at utfallene av hvert delforsøk ikke har innvirkning på hverandre.

b. $EX=1/\tfrac{1}{2}=2$. La Y= antall gutter. Antall jenter er 1, dermed er også forventet antall jenter 1, så $Y=X-1$, og $EY=EX-1=2-1=1$. [Hvis et helt land følger denne strategien, vil altså kjønnsforholdet bli 1:1!]

c. $P(X\leq 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$
$P(X=1|X\leq 2)=\frac{P(X=1\cap X\leq 2)}{P(X\leq 2)}=\frac{P(X=1)}{P(X\leq 2)}=\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$
$P(X=2|X\leq 2)=\frac{P(X=2)}{P(X\leq 2)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$. $E(X|X\leq 2)=1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=\underline{\frac{4}{3}}$.
Igjen er det $\underline{1}$ jente, så $E(Y|X\leq 2)=\frac{4}{3}-1=\underline{\frac{1}{3}}$

d. La X= antall barn, Y= antall gutter, Z= antall jenter. Vi har 4 mulige sekvenser av barn, og $P(J)=\frac{1}{2}$, $P(GJ)=\frac{1}{4}$, $P(GGJ)=\frac{1}{8}$, $P(GGG)=\frac{1}{8}$.
$P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{1}{4}$, $P(X=3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$, $EX=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}=\underline{\frac{7}{4}}$
$P(Z=0)=\frac{1}{8}$, $P(Z=1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$, $EZ=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{7}{8}=\underline{\frac{7}{8}}$
$Y=X-Z$, $EY=EX-EZ=\frac{7}{4}-\frac{7}{8}=\underline{\frac{7}{8}}$. [Så hvis et helt land følger denne strategien, blir altså også i dette tilfellet 1:1!]