MA0002, 2006V. Løsningsskisse

1a. $f_x = 4\frac{(1+4(x+1)^2+y^2)-(x+1)\cdot 8(x+1)}{(1+4(x+1)^2+y^2)^2} = 4\frac{1-4(x+1)^2+y^2}{(1+4(x+1)^2+y^2)^2} \left(= 4\frac{y^2-4x^2+8x-3}{(1+4(x+1)^2+y^2)^2}\right)$ skal være −

$f_y = \frac{-8(x+1)y}{(1+4(x+1)^2+y^2)^2}$

b. $\nabla f(0,0) = \left[\frac{4\cdot(-3)}{25} \quad 0\right]'$, som har samme retning som $[-1 \quad 0]'$.

c. Vi skal finne ut når $f_x=0$ og $f_y=0$. Fra $f_y=0$, ser vi at $x=-1$ eller $y=0$. $f_x=0$ gir da når $x=-1$ at $1+y^2=0$, som er umulig. Når $y=0$ gir $f_x=0$ $1-4(x+1)^2=0$, $(x+1)^2=1/4$, $x+1=\pm\frac{1}{2}$, dvs. $x=-\frac{3}{2}$ eller $x=-\frac{1}{2}$. Bare $(-\frac{1}{2},0)$ ligger i definisjonsmengden.

d. Høyeste og laveste punkt må være enten i et kritisk punkt (dvs. $(-\frac{1}{2},0)$), eller på randa, $x^2+y^2=1$. Vi undersøker randa med Lagranges metode, $g(x,y)=x^2+y^2=1$. $\nabla g = [2x \quad 2y]'$.

$\nabla f = \lambda \nabla g$ gir (1) $\frac{4(1-4(x+1)^2+y^2)}{N} = 2\lambda x$, (2) $\frac{-8(x+1)y}{N} = 2\lambda y$,

der $N=(1+4(x+1)^2+y^2)^2$. I tillegg har vi (3) $x^2+y^2=1$.

Hvis $\underline{y=0}$, gir (3) $x=\pm 1$. Hvis $\underline{y\neq 0}$, kan y forkortes fra (2), slik at $2\lambda = \frac{-8(x+1)}{N}$. Innsatt i (1) gir dette

$\frac{4(1-4(x+1)^2+y^2)}{N} = \frac{-8(x+1)x}{N}$, eller $1-4(x+1)^2+y^2 = -2(x+1)x$. Setter vi inn $y^2=1-x^2$ fra (3) og forenkler, får vi $3x^2+6x+2=0$, som gir $x=\frac{-6\pm\sqrt{36-24}}{6} = -1\pm\frac{\sqrt{12}}{6} = -1\pm\frac{2\sqrt{3}}{6} = -1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Bare $\frac{\sqrt{3}}{3}-1 \approx \cancel{0{,}423}$ $-0{,}423$ kan være x-koordinat på enhetssirkelen $x^2+y^2=1$ $(-\frac{\sqrt{3}}{3}-1<-1)$.

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}-1\approx -0{,}423$ gir $y^2 = (\frac{\sqrt{3}}{3}-1)^2 = 1-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}-1 = \frac{2\sqrt{3}-1}{3} \approx 0{,}821$ (og $y=\pm 0{,}906$).

Vi har nå følgende kandidater:

(x,y)	$f(x,y)$
$(-\frac{1}{2},0)$	1
$(-1,0)$	0
$(1,0)$	$8/17 \approx 0{,}471$
$(-0{,}423 \pm 0{,}906)$	$\approx 0{,}732$ (eksakt $\sqrt{3}-1$)

Vi ser at laveste temperatur er 0°C (i $(-1,0)$) og høyeste temperatur er 1°C i $(-\frac{1}{2},0)$.

Enklere: Nevner i $f(x,y)$ er alltid positiv. Teller er positiv, unntatt når $x=-1$, da teller er 0. Laveste temperatur er altså 0°C, som oppnås når $x=-1$. Siden $x^2+y^2\le 1$, må da $y=0$. Vi ser også at uansett x, blir $f(x,y)$ størst når y^2 i nevner er lik 0, dvs. $y=0$. Vi kan finne ut når $\frac{4(x+1)}{1+4(x+1)^2}$ er størst mulig ved å se på det som en funksjon av én variabel, der $x\in[-1,1]$. Husk å sjekke endepunktene!

2a. $\det M = 0{,}5 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 0{,}5 = -0{,}75.$

$$M^{-1} = \frac{1}{-0{,}75}\begin{bmatrix} 0{,}5 & -2 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}667 & 2{,}667 \\ 0{,}667 & -0{,}667 \end{bmatrix} \quad \left(\text{el. } \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

b. $\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 0{,}5-\lambda & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = 0{,}25 - \lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - \lambda - 0{,}75.$

$\det(M-\lambda I) = 0$: $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \frac{1 \pm 2}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ el. $\lambda = \frac{3}{2}$.

c. For egenverdien $-0{,}5$:

$(M + 0{,}5 I)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{matrix} u + 2v = 0 \\ 0{,}5u + v = 0. \end{matrix}$

F. eks. $u = 2$, $v = -1$. Egenvektor $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

For egenverdien 1,5:

$(M - 1{,}5 I)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0{,}5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{matrix} -u + 2v = 0 \\ 0{,}5u - v = 0. \end{matrix}$

F. eks. $u = 2$, $v = 1$. Egenvektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d. Forholdet er gitt ved egenvektoren som hører til største egenverdi, 1,5, altså $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dobbelt så mange ungfugler som voksne. Relativ vekstrate er største egenverdi, 1,5.

Enklere løsn. av 2b:

$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 0{,}5-\lambda & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = (0{,}5-\lambda)^2 - 1.$

$\det(M-\lambda I) = 0$: $(0{,}5-\lambda)^2 = 1$, $0{,}5 - \lambda = \pm 1$, $\lambda = 0{,}5 \mp 1$, $\lambda = -0{,}5$ el. $\lambda = 1{,}5$.

(Trenger ikke å bruke formel for løsn. av andregradslikn.)