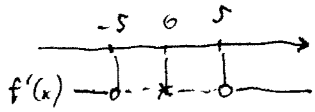
Eksamen MA0001 2006V. Løsningsskisse

1a. $f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2}$, $f''(x) = 25\cdot(-2)x^{-3} = \frac{50}{x^3}$ $\quad x \neq 0.$

Hvis $x<0$, er $f(x)<0$, og hvis $x>0$, er $f(x)>0$, altså ingen nullpunkter.

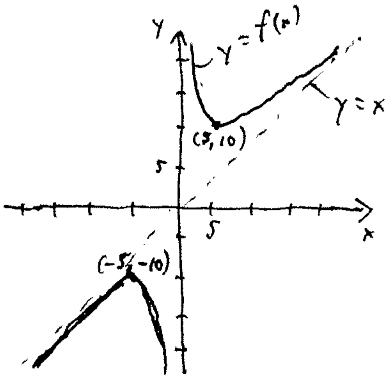
$f'(x) = \frac{x^2-25}{x^2} = \frac{(x-5)(x+5)}{x^2}$. Fortegnsskjema:



Lokalt maksimum i -5, lokalt minimum i 5.

$f''(x)<0$ for $x<0$ (konkav nedover) og $f''(x)>0$ for $x>0$ (konkav oppover), men ikke noe vendepunkt i 0, da f ikke er definert der.

b.



$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $x=0$ er vertikal asymptote.

$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{25}{x} = 0$, $y=x$ er skråasymptote.

c. $\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(x+\frac{25}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2+25\ln x\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2+25-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^2+\frac{49}{2}$

2. La $g(x)=\sin x^2$. $g'(x)=2x\cos x^2$, $g''(x)=2(\cos x^2 - x\cdot\sin x^2\cdot 2x)$
$= 2(\cos x^2 - 2x^2\sin x^2)$.

$g(0)=0$, $g'(0)=0$, $g''(0)=2$. Andregrads taylorpolynom:

$P(x) = 0+0x+\frac{2}{2!}x^2 = x^2$. $\int_0^{1/2}\sin x^2\,dx \approx \int_0^{1/2} x^2\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^{1/2} = \frac{1}{24} \approx 0{,}417.$

[Virkelig verdi: $\int_0^{1/2}\sin x^2\,dx \approx 0{,}0415$.]

3a. Implisitt derivasjon: $2x+3y^2\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}=0$, $(3y^2-2)\frac{dy}{dx}=-2x$, $\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{3y^2-2}$.

I punktet $(2,1)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cdot 2}{3\cdot 1^2-2} = \frac{-4}{1} = -4$.

b. $y-1=-4(x-2)$, dvs. $y=-4x+9$.