

**Eksamen i** : MA 001 BRUKERKURS I MATEMATIKK

**Dato** : Onsdag 6. januar 1993

**Varighet** : 6 timer

**Antall vekttall** : 5

Tillatte hjelpemidler:  
Kalkulator, lærebok

**Sensur** : Onsdag 20. januar 1993

Oppgavesettet er på 2 sider og består av 6 oppgaver.

### Oppgave 1.

Den radioaktive isotopen thorium-234 brytes ned (desintegrerer) i samsvar med differensialligningen

$$(*) \quad \frac{dy}{dt} = -ay$$

der  $a$  er en positiv konstant og  $y = y(t)$  er mengden av thorium-234 ved tiden  $t$ .

- Løs differensialligningen (\*) og finn halveringstiden for thorium-234 (i dager) når det oppgis at 100 mg av stoffet etter 7 dager er redusert til 82,04 mg.
- I en beholder med 100 mg thorium-234 ved tiden  $t = 0$  tilføres det 1 mg av isotopen pr. dag. La  $y(t)$  være mengden thorium-234 i beholderen ved tiden  $t$ . Beregn  $y(t)$  og finn grenseverdien  $y(t)$  går mot når  $t \rightarrow \infty$ .

### Oppgave 2.

- Skriv  $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$  på formen  $re^{iv}$ , ( $r \geq 0, v \in [0, 2\pi)$ ) og finn  $\sqrt{z}$ . Skriv så  $\sqrt{z}$  på formen  $x + yi$ , ( $x, y \in \mathbf{R}$ ).
- Løs annengradsligningen

$$z^2 + 2z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i = 0.$$

Merk av løsningene i det komplekse planet.

### Oppgave 3.

Befolkningsstørrelsen i et land øker med 3% pr. år. Hvor stor prosentvis vekst pr. år må landets brutto nasjonalprodukt (BNP) ha for at per capita inntekt (= BNP/befolkningsstørrelse) skal dobles på 20 år?

### Oppgave 4.

Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned}x' &= 2x - 2y \\y' &= 2x - 3y.\end{aligned}$$

### Oppgave 5.

Man skal lage en eske uten lokk med et gitt samlet areal  $A$  av bunn og sideflater. Kall sidekantene i den rektangulære bunnen  $x$  og  $y$ .

a) Vis at volumet  $V$  av esken er gitt ved

$$V = \frac{Axy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

b) Finn  $x$  og  $y$  slik at volumet blir størst mulig og beregn dette volumet. (Du kan gå ut fra at et slikt maksimum for  $V$  eksisterer.)

### Oppgave 6.

I en modell for ryktespredning i et samfunn på  $B$  individer går man ut fra at antallet  $x = x(t)$  av individer som kjenner et bestemt rykte ved tiden  $t$  tilfredsstiller differensialligningen

$$(*) \quad \frac{dx}{dt} = ax(B - x)$$

der  $a$  er en positiv konstant.

a) La  $N_0$  være antall individer som kjenner ryktet ved tiden  $t = 0$ . Finn løsningen av (\*) uttrykt ved  $a, B, N_0$  og  $t$ .

b) Et rykte om at et større flyselskap sto på konkursens rand begynte å spre seg blant en gruppe aksjemeglere. Ved tiden  $t = 0$  kjente 10% av alle meglerne ryktet, og 2 timer senere var det 25% som kjente det. Hvor lang tid gikk det før 75% av aksjemeglerne kjente ryktet når vi antar at ryktet spredde seg i samsvar med (\*)?

**MERK.** Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.