**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen:
Håvard Rue   73 59 35 20

EKSAMEN I FAG SIF5079 Tidsrekker og filterteori

Lørdag 8. desember 2001
Tid: 09:00–14:00

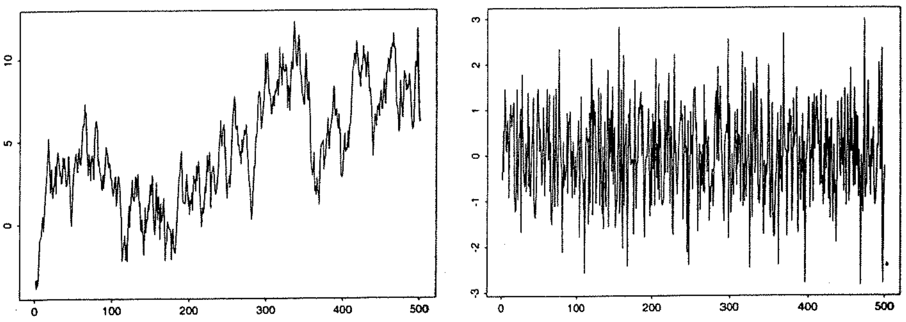
Tilatte hjelpemidler:
Godkjent kalkulator.
Statistiske tabeller og formler, TAPIR.
Et gult ark med egne formler.

Sensurfrist: 7. januar 2002.

NB: Alle svar skal begrunnes.

Notasjon brukt i denne oppgaven:

- w_t er hvit støy med varians σ_w^2.
- B er *backshift*-operatoren, slik at $B^k x_t \equiv x_{t-k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- x_t^s er prognosen for x_t gitt $x_1, \ldots, x_s$.



(a) x_t (b) y_t

Figur 1: (a) data fra modellen definert i (1), og (b) den deriverte.

Oppgave 1

La x_t være gitt ved

$$(1 - \phi B)x_t = bt + w_t \tag{1}$$

der b er en konstant.

a) Hva menes med at en stokastisk prosess er svakt stasjonær?
For hvilke verdier av b og ϕ er x_t en svakt stasjonær prosess?

Anta videre at $|\phi| < 1$ og $b \neq 0$.

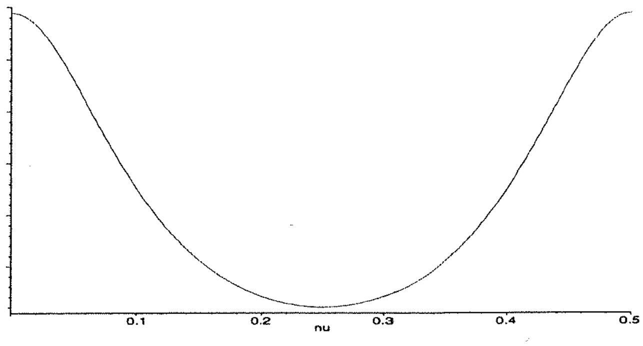
Data fra prosessen i (1) er vist i figur 1a.

b) Hvorfor analysere vi ofte differensierte data (figur 1b)

$$y_t = (1 - B)x_t$$

når dataene er som i figur 1a?

c) Hvilken ARMA-modell følger y_t?
Er y_t invertibel? Kommenter.



Figur 2: Ett mulig frekvensspekter til z_t.

Oppgave 2

La x_t være gitt ved

$$x_t = \phi_x x_{t-1} + w_{x,t}, \qquad |\phi_x| < 1, \quad \mathrm{Var}(w_{x,t}) = \sigma^2_{w,x}$$

og y_t være gitt ved

$$y_t = \phi_y y_{t-1} + w_{y,t}, \qquad |\phi_y| < 1, \quad \mathrm{Var}(w_{y,t}) = \sigma^2_{w,y}$$

der indeksene "x" og "y" indikerer tilhørighet til x- og y-prosessen.

Anta $\{x_t\}$ er ukorrelert med $\{y_t\}$ og at vi observerer *kun* z_t, der

$$z_t = x_t + y_t$$

a) Finn autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) til z_t.

La $f_x(\nu)$ være frekvensspekteret til x_t, og tilsvarende med $f_y(\nu)$ og $f_z(\nu)$.

b) Vis at

$$f_z(\nu) = f_x(\nu) + f_y(\nu). \qquad \textbf{(2)}$$

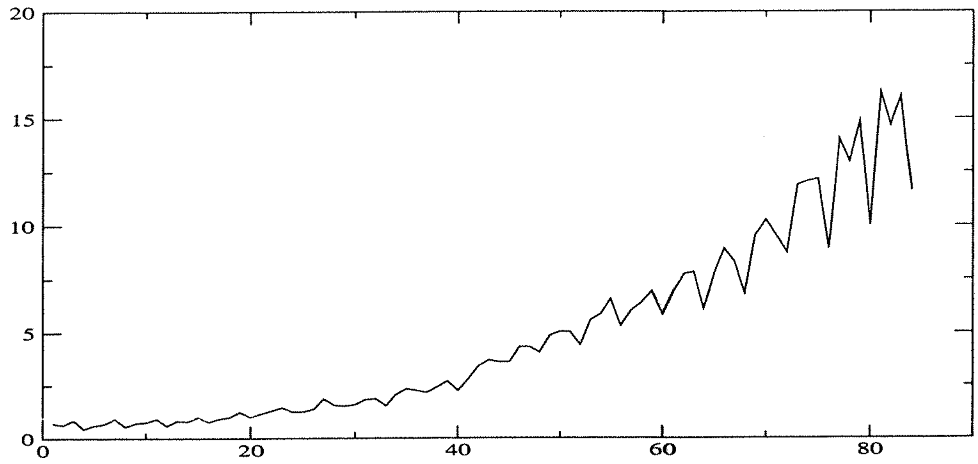
Bruk (2) til å finne $f_z(\nu)$.

c) Dersom $f_z(\nu)$ hadde vært som i figur 2, hva vet vi da om fortegnene til ϕ_x og ϕ_y?

Anta videre at $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, samt at $\phi_x = \phi_y = \phi$.

d) Vis at z_t er en ARMA-prosess. Bestem orden og alle parametre i modellen.

e) Finn ett- og to-stegs prognose samt tilhørende prognosefeil for z_t.



Figur 3: Kvartalsvise overskudd for Johnson & Johnson.

Oppgave 3

I figur 3 er det vist kvartalvise data for overskudd for firmaet Johnson & Johnson.

Du blir forelagt følgende modell: De observerte data, y_t, modelleres ved

$$y_t = \mu_t + s_t + v_t$$

der μ_t er trend, s_t er sesongkomponent og v_t er hvit støy. Trenden μ_t modelleres ved

$$\mu_t = \beta\mu_{t-1} + w_t$$

der w_t er hvit støy og β en parameter. Sesongkomponenten s_t modelleres ved

$$s_t + s_{t-1} + s_{t-2} + s_{t-3} = u_t$$

der u_t er hvit støy.

a) Skriv modellen på "state-space" form, dvs med en tilstands-ligning og en observasjonsligning.

Forklar kort hvordan du vil tilpasse modellen til de observerte data samt beregne prognoser for det kvartalvise overskuddet.

b) Diskuter hvordan sesongvariasjon er tatt hensyn til i denne modellen. Burde det vært gjort på en annen må? I så fall, hvordan?

Oppgave 1

a) svakt stasjonær: $E[x_t] = \mu$

$$\mathrm{Cov}[x_t, x_s] = \gamma(s-t)$$

Har modellen:

$$(1-\phi B)x_t = bt + w_t$$

$$x_t = \phi x_{t-1} + bt + w_t$$

Krever:

$E[x_t] = \mu \Rightarrow \mu = \phi\mu + bt + 0$ for alle t

dvs. må ha $\underline{\underline{b=0}}$ (som gir $\mu = 0$)

Får da

$$x_t = \phi x_{t-1} + w_t \qquad (*)$$

som er en AR(1)-modell

Vi vet at denne er svakt stasjonær dersom $|\phi| < 1$.

[Eventuelt kan selvfølgelig utlede dette siste kravet, slik vi har gjort i pensum.]

b) Figur 1 (a) tyder på at den observerte tidsrekken er ikke-stasjonær. Vi differensierer da den observerte tidsrekken og analyserer denne i stedet dersom denne synes å være stasjonær.

c)

$$y_t = x_t - x_{t-1} \qquad (x_t = \phi x_{t-1} + bt + \omega_t)$$

$$= \phi x_{t-1} + bt + \omega_t$$
$$- \phi x_{t-2} - b(t-1) - \omega_{t-2}$$

$$\underline{y_t} = \phi y_{t-1} + b + \omega_t - \omega_{t-1}$$

$E[y_t]$: $\mu = \phi\mu + b \Rightarrow \mu = \frac{b}{1-\phi}$

⊃: y_t følger en ARMA(1,1) - modell med $\mu = \frac{b}{1-\phi}$

med $\phi_1 = \phi$ og $\theta_1 = -1$

Krav for invertibilitet: røttene til $\theta(z)=0$ skal ligge utenfor enhetssirkelen.

Her: $\theta(z) = 1 - \theta_1 z = 1 + z = 0 \Rightarrow z = -1$

dvs. modellen er <u>ikke</u> invertibel

Oppgave 2

X_t er AR(1) og har $\gamma_x(h) = \dfrac{\sigma^2_{w,x}}{1-\phi_x^2}\,\phi_x^{|h|}$

y_t er AR(1) og har $\gamma_y(h) = \dfrac{\sigma^2_{w,y}}{1-\phi_y^2}\,\phi_y^{|h|}$

For $z_t = x_t + y_t$:

$$\gamma_z(h) = \text{Cov}[x_{t+h} + y_{t+h},\, x_t + y_t]$$

$$= \text{Cov}[x_{t+h}, x_t] + \text{Cov}[y_{t+h}, y_t]$$

fordi x-prosessen er ukorrelert med y-prosessen

$$= \gamma_x(h) + \gamma_y(h)$$

$$= \frac{\sigma^2_{w,x}}{1-\phi_x^2}\,\phi_x^{|h|} + \frac{\sigma^2_{w,y}}{1-\phi_y^2}\,\phi_y^{|h|}$$

$$\rho_z(h) = \frac{\gamma_z(h)}{\gamma_z(0)} = \ldots$$

c)

$$f(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h)\, e^{-2\pi i \nu h}$$

Dvs.

$$f_z(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_z(h)\, e^{-2\pi i \nu h} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_x(h) + \gamma_y(h)\right) e^{-2\pi i \nu h}$$

$$= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_x(h) e^{-2\pi i \nu h} + \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_y(h)\, e^{-2\pi i \nu h}$$

$$= \underline{\underline{f_x(h) + f_y(h)}}$$

$$f_x(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{\omega x}^2}{1-\phi_x^2}\, \phi_x^{|h|}\, e^{-2\pi i \nu h}$$

$$= \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{1-\phi_x^2}\left[1 + \sum_{h=1}^{\infty} \phi_x^h \left(\cos(2\pi\nu h) - i\sin(2\pi\nu h) + \cos(2\pi\nu h) + i\sin(2\pi\nu h)\right)\right]$$

$$= \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{1-\phi_x^2}\left[1 + 2\sum_{h=0}^{\infty} \phi_x^h \cos(2\pi\nu h) - 2\right]$$

Summeformel fra Rotman: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1 - r\cos x}{1 + r^2 - 2r\cos x}$

for $r^2 < 1$

Vi har $r = \phi_x$, $x = 2\pi\nu$, $n = h$

$$\Rightarrow \quad f_x(\nu) = \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{1-\phi_x^2}\left[-1 + \frac{2(1-\phi_x\cos(2\pi\nu))}{1+\phi_x^2-2\phi_x\cos(2\pi\nu)}\right]$$

$$= \dots = \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{1+\phi_x^2-2\phi_x\cos(2\pi\nu)}$$

Derned:

$$\underline{\underline{f_z(\nu) = \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{1+\phi_x^2-2\phi_x\cos(2\pi\nu)} + \frac{\sigma_{\omega,y}^2}{1+\phi_y^2-2\phi_y\cos(2\pi\nu)}}}$$

c) $$f_x'(\nu) = \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{(1+\phi_x^2-2\phi_x\cos(2\pi\nu))^2}\cdot(+2\phi_x\sin(2\pi\nu)\cdot 2\pi)$$

Dvs. i intervallet $\nu \in [0, \frac{1}{2}]$ er $f_x(\nu)$ voksende dersom ϕ_x er positiv og avtagende dersom ϕ_x er negativ

I figur er $f_z(\nu)$ avtagende i et område og voksende i en annet. Derned må ϕ_x og ϕ_y ha <u>motsatt fortegn</u>.

d)

$$(1-\phi B)\, x_t = \omega_{x,t} \quad \Rightarrow \quad x_t = (1-\phi B)^{-1}\omega_{x,t}$$

$$(1-\phi B)\, y_t = \omega_{y,t} \quad \Rightarrow \quad y_t = (1-\phi B)^{-1}\omega_{y,t}$$

$$z_t = x_t + y_t = (1-\phi B)^{-1}(\omega_{x,t} + \omega_{y,t})$$

$$\Downarrow$$

$$(1-\phi B)\, z_t = \omega_{x,t} + \omega_{y,t} = \omega_t \quad \text{der } \omega_t \sim N(0, 2\sigma^2)$$

dvs. z_t er $\underline{\underline{\text{ARMA}(1,0) \text{ med } \phi_1 = \phi \text{ og}}}$ støyvarians $2\sigma^2$

e)

$$z_{t+1}^t = E[z_{t+1} \mid z_0, \dots, z_t]$$

$$= E[\phi z_t + \omega_t \mid z_0, \dots, z_t] = \phi z_t + 0$$

$$\underline{\underline{z_{t+1}^t = \phi z_t}}$$

$$z_{t+2}^t = E[z_{t+2} \mid z_0, \dots, z_t] = E[\phi z_{t+1} + \omega_{t+1} \mid z_0, \dots, z_t]$$

$$= E[\phi(\phi z_t + \omega_t) + \omega_{t+1} \mid z_0, \dots, z_t] = \phi^2 z_t$$

$$\underline{\underline{z_{t+2}^t = \phi^2 z_t}}$$

$$\mathrm{Var}\left[Z_{t+1} \mid Z_0, \dots, Z_t\right] = \mathrm{Var}\left[\phi Z_t + \omega_t \mid Z_0, \dots, Z_t\right]$$

$$= \mathrm{Var}\left[\omega_t \mid Z_0, \dots, Z_t\right] = \mathrm{Var}\left[\omega_t\right] = \underline{\underline{2\sigma^2}}$$

$$\mathrm{Var}\left[Z_{t+2} \mid Z_0, \dots, Z_t\right] = \mathrm{Var}\left[\phi^2 Z_t + \phi \omega_t + \omega_{t+1} \mid Z_0, \dots, Z_t\right]$$

$$= \mathrm{Var}\left[\phi \omega_t\right] + \mathrm{Var}\left[\omega_{t+1}\right]$$

$$= \phi^2 \cdot 2\sigma^2 + 2\sigma^2 = \underline{\underline{2\sigma^2(1+\phi^2)}}$$

OPPGAVE 3

a)

$$x_t = \phi x_{t-1} + w_t \quad , \quad w_t \sim N(0, Q)$$

$$y_t = A_t x_t + v_t \quad , \quad v_t \sim N(0, R)$$

der

$$x_t = \begin{bmatrix} T_t \\ S_t \\ S_{t-1} \\ S_{t-2} \end{bmatrix} , \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad R = r_{11}$$

der $q_{11} = Var(w_t)$, $q_{22} = Var(u_t)$, $r_{11} = Var(v_t)$

Si noe fornuftig om MLE, gjerne hvordan Kalman-filteret trenges i denne forbindelse.

b) Diskuter .... (se boka)

Det er rimelig å modellere sesongvariasjonen på en slik måte!