$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k \ , \quad z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$$

**11.** $ijk = -1 \Rightarrow \underbrace{ii}_{-1}jk = -i \Rightarrow \underline{\underline{jk = i}}$

$\Rightarrow \underbrace{jj}_{-1}k = ji \Rightarrow \underline{\underline{k = -ji}}$

$ijk = -1 \Rightarrow ij\underbrace{kk}_{-1} = -k \Rightarrow \underline{\underline{ij = k}}$

$$\boxed{\therefore \ \underline{\underline{k = ij = -ji}} \ \blacksquare}$$

Vi vet $ij = k \Rightarrow \underline{\underline{i = -kj}}$

$$\boxed{\therefore \ \underline{\underline{i = jk = -kj}} \ \blacksquare}$$

$ij = k \Rightarrow \underline{\underline{j = -ik}}$

$k = -ji \Rightarrow \underline{\underline{j = ki}}$

$$\boxed{\therefore \ \underline{\underline{j = ki = -ik}} \ \blacksquare}$$

**12.**

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k$$

$$w = w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k$$

$$\therefore zw = (z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k)(w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)$$

$$
\begin{aligned}
&= z_0 w_0 + z_0 w_1 i + z_0 w_2 j + z_0 w_3 k \\
&+ z_1 w_0 i + z_1 w_1 ii + z_1 w_2 ij + z_1 w_3 ik \\
&+ z_2 w_0 j + z_2 w_1 ji + z_2 w_2 jj + z_2 w_3 jk \\
&+ z_3 w_0 k + z_3 w_1 ki + z_3 w_2 kj + z_3 w_3 kk
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= z_0 w_0 + z_0 w_1 i + z_0 w_2 j + z_0 w_3 k \\
&+ z_1 w_0 i - z_1 w_1 + z_1 w_2 k - z_1 w_3 j \\
&+ z_2 w_0 j - z_2 w_1 k - z_2 w_2 + z_2 w_3 i \\
&+ z_3 w_0 k + z_3 w_1 j - z_3 w_2 i - z_3 w_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= z_0 w_0 - z_1 w_1 - z_2 w_2 - z_3 w_3 \\
&+ (z_0 w_1 + z_1 w_0 + z_2 w_3 - z_3 w_2) i \\
&+ (z_0 w_2 - z_1 w_3 + z_2 w_0 + z_3 w_1) j \\
&+ (z_0 w_3 + z_1 w_2 - z_2 w_1 + z_3 w_0) k
\end{aligned}
$$

$$wz = (w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)(z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k)$$

Dette blir jo det samme som i sted, men hvor $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ er byttet med $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$

$\therefore \; wz =$

$$w_0 z_0 - w_1 z_1 - w_2 z_2 - w_3 z_3$$
$$+ (w_0 z_1 + w_1 z_0 + w_2 z_3 - w_3 z_2) i$$
$$+ (w_0 z_2 - w_1 z_3 + w_2 z_0 + w_3 z_1) j$$
$$+ (w_0 z_3 + w_1 z_2 - w_2 z_1 + w_3 z_0) k$$

Realdelen er den samme. Vektordelene er derimot ulike. Se på hvilke deler som er negative.

13. $z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k$

$\bar{z} = z_0 - z_1 i - z_2 j - z_3 k$

$\therefore z\bar{z} = (z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k)(z_0 - z_1 i - z_2 j - z_3 k)$

Hvis vi tenker på $w \triangleq \bar{z}$ : $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$

$= \{z_0, -z_1, -z_2, -z_3\}$

kan vi bruke det vi fant i sted til å

finne $z\bar{z} = (zw) =$

$= z_0 w_0 - z_1 w_1 - z_2 w_2 - z_3 w_3$

$+ (z_0 w_1 + z_1 w_0 + z_2 w_3 - z_3 w_2) i$

$+ (z_0 w_2 - z_1 w_3 + z_2 w_0 + z_3 w_1) j$

$\underline{\underline{+ (z_0 w_3 + z_1 w_2 - z_2 w_1 + z_3 w_0) k}}$

$\downarrow$

$z_0 z_0 + z_1 z_1 + z_2 z_2 + z_3 z_3$

$+ (\cancel{-z_0 z_1} + \cancel{z_1 z_0} - \cancel{z_2 z_3} + \cancel{z_3 z_2}) i$

$+ (\cancel{-z_0 z_2} + \cancel{z_1 z_3} + \cancel{z_2 z_0} - \cancel{z_3 z_1}) j$

$+ (\cancel{-z_0 z_3} - \cancel{z_1 z_2} + \cancel{z_2 z_1} + \cancel{z_3 z_0}) k$

$\underline{\underline{= z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}$

$$\bar z z = (z_0 - z_1 i - z_2 j - z_3 k)(z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k)$$

Dette er det samme som $wz$ som vi også har funnet tidligere. Derfor:

$$w_0 z_0 - w_1 z_1 - w_2 z_2 - w_3 z_3$$
$$+ (w_0 z_1 + w_1 z_0 + w_2 z_3 - w_3 z_2)\, i$$
$$+ (w_0 z_2 - w_1 z_3 + w_2 z_0 + w_3 z_1)\, j$$
$$+ (w_0 z_3 + w_1 z_2 - w_2 z_1 + w_3 z_0)\, k$$

$$\downarrow$$

$$\bar z z = z_0 z_0 + z_1 z_1 + z_2 z_2 + z_3 z_3$$
$$+ (\cancel{z_0 z_1} - \cancel{z_1 z_0} - \cancel{z_2 z_3} + \cancel{z_3 z_2})\, i$$
$$+ (\cancel{z_0 z_2} + \cancel{z_1 z_3} - \cancel{z_2 z_0} - \cancel{z_3 z_1})\, j$$
$$+ (\cancel{z_0 z_3} - \cancel{z_1 z_2} + \cancel{z_2 z_1} - \cancel{z_3 z_0})\, k$$

$$= z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

$$\boxed{\therefore\ z \bar z = \bar z z \quad \forall\, z \in \mathbb{H} \quad \blacksquare}$$

**14.** $z \in \mathbb{H}$

$$z^{-1} \triangleq \frac{1}{|z|^2}\bar{z} = \frac{1}{\bar{z}z}\cdot\bar{z}$$

$$zz^{-1} = z\frac{1}{\bar{z}z}\bar{z} = z\frac{1}{z\bar{z}}\bar{z} = \underbrace{z\frac{1}{z}}_{1}\,\underbrace{\frac{1}{\bar{z}}\bar{z}}_{1} = \underline{\underline{1}} \quad \blacksquare$$

Det viste vi i sted

$$z^{-1}z = \frac{1}{\cancel{\bar{z}}z}\cancel{\bar{z}}z = \underline{\underline{1}} \quad \blacksquare$$

$$\boxed{\therefore \; zz^{-1} = z^{-1}z = 1 \quad \blacksquare}$$

**15.** $z = z_1 i + z_2 j + z_3 k$

$w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$

$$\bar{z}w = (-z_1 i - z_2 j - z_3 k)(w_1 i + w_2 j + w_3 k)$$

$$= -z_1 w_1 i^2 - z_1 w_2 ij - z_1 w_3 ik$$

$$- z_2 w_1 ji - z_2 w_2 j^2 - z_2 w_3 jk$$

$$- z_3 w_1 ki - z_3 w_2 kj - z_3 w_3 k^2$$

$= z_1 w_1 - z_1 w_2 k + z_1 w_3 j$

$+ z_2 w_1 k + z_2 w_2 - z_2 w_3 i$

$- z_3 w_1 j + z_3 w_2 i + z_3 w_3$

$= z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3$

$+ (z_3 w_2 - z_2 w_3) i$

$+ (z_1 w_3 - z_3 w_1) j$

$+ (z_2 w_1 - z_1 w_2) k$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} z_3 w_2 - z_2 w_3 \\ z_1 w_3 - z_3 w_1 \\ z_2 w_1 - z_1 w_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Vektordelen av $\bar{z}w$ tilsvarer kryssproduktet av vektordelen til $w$ og $z$.

Skalardelen av $\bar{z}w$ tilsvarer skalarproduktet av vektordelen til $w$ og $z$.

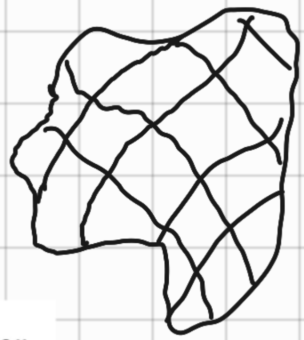
# Divergensteoremet og Stokes teorem:

Her kommer eksamensnotatene mine fra i fjor om nettop dette ☺ :

---

# 13 - Vektorkalkulus

$\Pi \rightarrow$ (Volum)



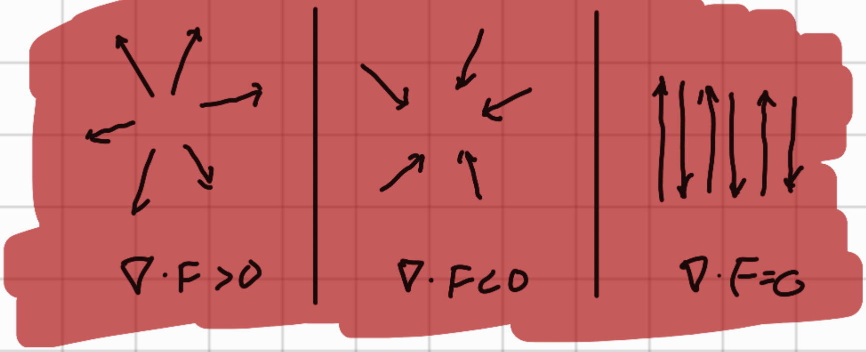
$\boxed{1}$ Forklar hva divergensen til et vektorfelt er og hva divergensteoremet sier.

Divergensen til et vektorfelt $\vec{F}$ er definert som $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$ : $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \ \frac{\partial}{\partial x_2} \ \frac{\partial}{\partial x_3}\right]^T$

Divergensen til et punkt forteller oss hvorvidt det punktet oppfører seg som en kilde (source) eller et dragsug (sink). En positiv divergens tilsier at feltet oppfører seg som en kilde, hvorav negativ divergens tilsier et dragsug.

Divergensteoremet:

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}\,dx$$




Venstresiden korresponderer til total fluks gjennom randen til $\Omega$. Høyresiden tilsvarer total divergens i hele $\Omega$. Så det divergensteoremet sier er at utstrømningen til $\vec{F}$ på $\partial\Omega$ er lik ekspansjonen til $\vec{F}$ i $\Omega$.

2 Forklar hva rotasjonen til et vektorfelt er og hva Stokes' teorem sier.

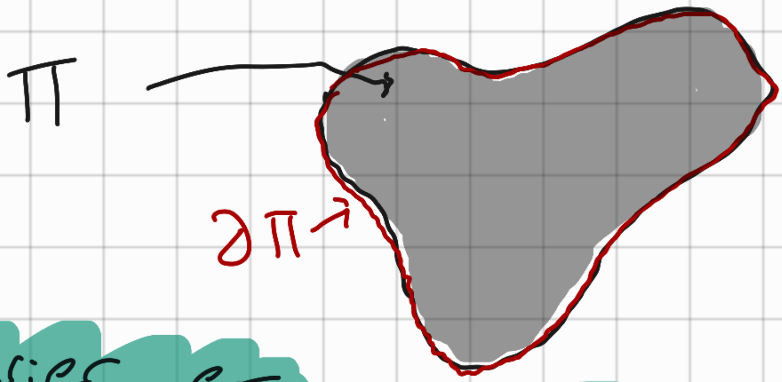
Rotasjonen eller curlen til et vektorfelt $\vec{F}$ er definert som:

$$\text{Curl } \vec{F} = \nabla\times\vec{F} \quad : \quad \nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \ \frac{\partial}{\partial x_2} \ \frac{\partial}{\partial x_3}\right]^T$$

Curlen til et vektorfelt gir et vektorfelt. Curlen til et gitt punkt forteller oss noe om hvordan en strøm om punktet vil rotere. Tenkt at vi har sluppet en ball ned i vektorfeltet, vil curlen til posisjonen av ballen, gi en vektor som peker langs rotasjonsaksen til ballen. Høyrehåndsregelen vil gi retningen på rotasjonen.

# Stokes' teorem:

$$\oint_{\partial \Pi} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Pi} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

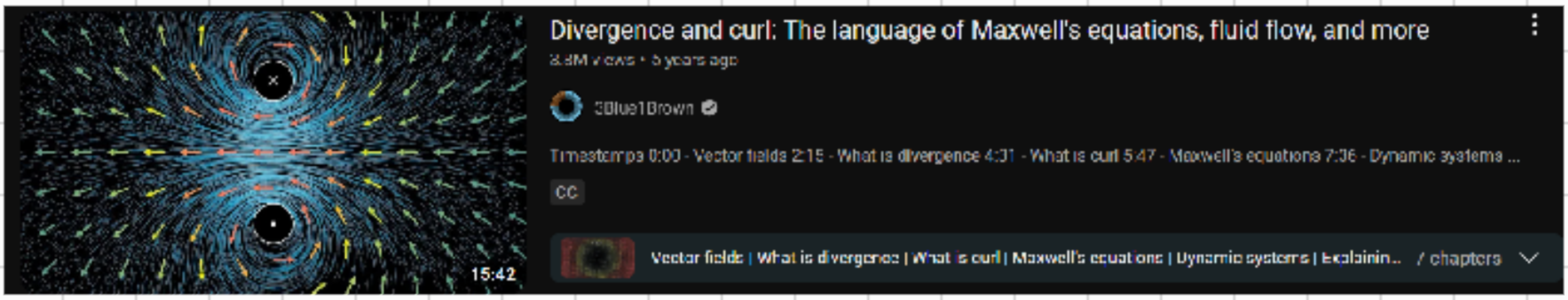



Det stokes' teorem sier, er at totalt arbeid langs $\partial \Pi$ er lik total curl som virker normalt på $\Pi$.

---

For en dypere forståelse av divergens-teoremet og stokes teorem, anbefaler jeg følgende video av 3b1b:

https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE




Utledning av maxwells likninger på integralform var en eksamensoppgave for oss i matte 4:

↓

## 1: Maxwells likninger

1 Skriv opp Maxwells likninger på differensialform og utled

1: de korresponderende likningene på integralform,

2: likningen for ladningskonservering, og

3: bølgelikningen ved homogent tilfelle ($\rho = 0$ og $\mathbf{J} = \mathbf{0}$).

## Maxwells likninger:

1. $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ , $\rho$: Ladningstetthet, $\varepsilon_0$: Permittivitet i vakuum

2. $\nabla \cdot B = 0$

3. $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

4. $c^2 \nabla \times B = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{J}{\varepsilon_0}$ , $\mu_0$: Permeabilitet i vakuum, $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$

Antar lukket område $\Omega \in \mathbb{R}^3$, og sammenhengende flate $\Sigma \in \mathbb{R}^3$

## Nødvendige teoremer:

Divergensteoremet: $\iiint_{\Omega} \nabla \cdot F \, dV = \oiint_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{S}$

Stokes teorem: $\iint_{\Sigma} \nabla \times F \cdot dS = \oint_{\partial\Sigma} F \cdot dl$

# Deloppgave 1:

1. $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \iiint_\Omega \nabla \cdot E \, dV = \iiint_\Omega \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$

$$\Rightarrow \boxed{\oiint_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \iiint_\Omega \rho \, dV}$$

(Her brukes divergensteoremet)

2. $\nabla \cdot B = 0 \iff \iiint_\Omega \nabla \cdot B \, dV = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\oiint_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0}$$

(Her brukes også divergensteoremet)

3. $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \iff \iint_\Sigma \nabla \times E \cdot dS = \iint_\Sigma -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\partial\Sigma} E \cdot dl = -\frac{d}{dt} \iint_\Sigma B \cdot dS}$$

(Her brukes Stokes teorem)

4. $c^2 \nabla \times B = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{J}{\varepsilon_0} \Longleftrightarrow c^2 \iint_\Sigma \nabla \times B \cdot ds = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{J}{\varepsilon_0}\right) ds$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 \cdot \oint_{\partial\Sigma} B \cdot dl = \frac{d}{dt} \cdot \iint_\Sigma E \cdot ds + \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \iint_\Sigma J ds}$$

(Her brukes også stokes teorem)

## 4: Utledning av varmelikning

Dette er også fra eksamen i matte 4.

4 Utled varmelikningen i tre romlige dimensjoner.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $T(x, t)$: Temperaturen i et gitt punkt $x$ i $\Omega$ ved tiden $t$

$\rho$: Massetetthet

$c$: Spesifikk varmekapasitet

$K$: Termisk konduktivitet

$q$: Varmefluks

Total varmeenergi i $\Omega$: $\boxed{\rho c \iiint_\Omega T(x, t) dx}$

Dersom vi antar konstant $\rho$ og $c$, hvor $T$ er noe-noe glatt, vil endring i total varmeenergi i $\Omega$ være gitt ved;

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c \iiint_{\Omega} T(x,t)\,dx\right) = \rho c \iiint_{\Omega} \dot{T}(x,t)\,dx}$$

De fleste stoffer følger Fouriers lov, som sier at varmefluksen er proporsjonal med temperaturgradienten;

$$\boxed{q = -K \cdot \nabla T}$$

Gitt antagelsen om at all endring i varmeenergi skjer over randen til $\Omega$, $\partial\Omega$, vil endring i total varmeenergi være gitt ved;

$$\boxed{-\rho c \iiint_{\Omega} \dot{T}\,dx = \iint_{\partial\Omega} q \cdot ds}$$

Divergensteoremet gir:

$$\boxed{-\rho c \iiint_{\Omega} T(x,t)\,dx = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot q\,dx = -\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla T)\,dx}$$

Antar konstant termisk konduktivitet:

$$\rho c \iiint_{\Omega} \dot{T}\, dx = K \cdot \iiint_{\Omega} \Delta T\, dx$$

Ettersom dette gjelder for et tilfeldig valgt område $\Omega$, må integrandene være like;

$$\boxed{\rho c \cdot \dot{T} = K \Delta T \iff \dot{T} = \frac{K}{\rho c} \Delta T}$$

---

Dere er kanskje mer vant til å se varmelikningen på formen:

$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$, men dette er akkurat det samme, hvor $T \triangleq u$, $\alpha \triangleq \frac{K}{\rho c}$.

Eyy! Ferdig for denne gang !!