

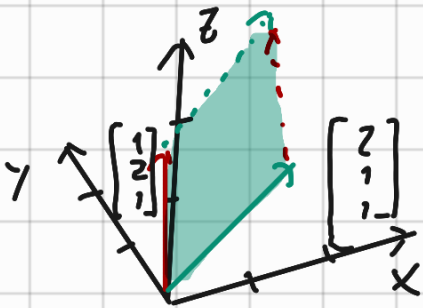
1. $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dette er jo en lineærtransformasjon
Sra basisvektorene $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Etersom funksjonen er definert på enhets-
kvadratet, vil flaten $F(x)$ være spent
ut som et parallelogram av vektorene;

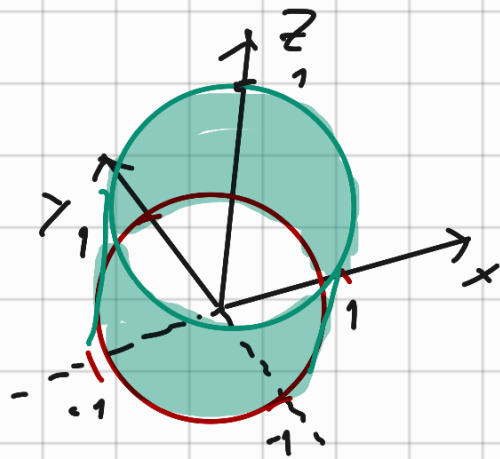
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} :$$



Kyb-Sara har det fint å
vel i hytte på Jervebu.

$$2. \quad F: [0, 2\pi) \times [0, 1]$$

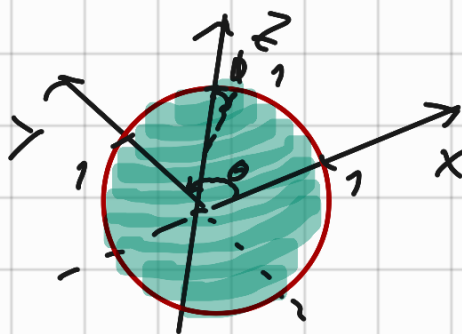
$$F(\theta, h) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ h \end{bmatrix}$$



x og y-komponentene parametriserer enhetssirkelen. z-komponenten er uavhengig. Derfor parametriserer dette en sylinder med radius 1 og høyde 1.

$$3. \quad F: [0, 2\pi) \times [0, \pi]$$

$$F(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix}$$

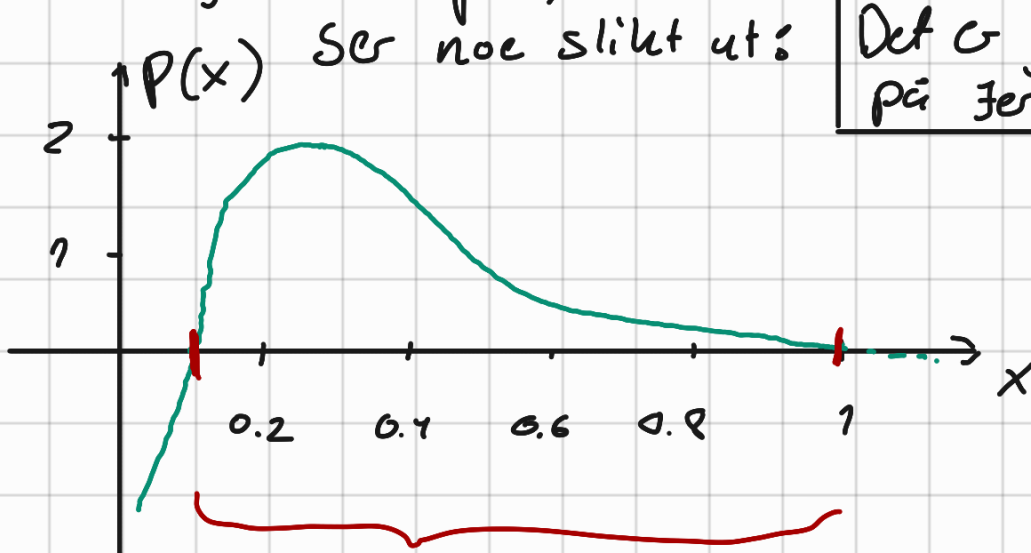


Dette kan forstås ved at vi for hver verdi ϕ , får en sirkel med ulik radius, høyt eller sakte.

4. $p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$p(x) = (40x - 4)(x - 1)^4$$

Grafen til $p(x)$



Det er jøggu fint
på ferrebu :-)

Denne bilen kan tydelig se ut som
en lølekuppel.

Nullpunktene er $x = 1$ og $x = \frac{1}{10}$

Dette gir oss en høyde på $\frac{9}{10}$.

Under antagelsen om at lølekuppelen er
rotasjonssymmetrisk, kan vi parametrisere
den som en sylinder, der vi ganger med
bredden gitt av $p(h)$.



$$\therefore F(\theta, h) = \begin{bmatrix} p(h) \cdot \cos\theta \\ p(h) \cdot \sin\theta \\ h \end{bmatrix}, \quad F: [0, 2\pi] \times \left[\frac{1}{10}, 1\right] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\therefore F(\theta, h) = \begin{bmatrix} (40h-4)(h-1)^4 \cos\theta \\ (40h-4)(h-1)^4 \sin\theta \\ h \end{bmatrix}$$



Vent nå litt??

Er det...?

6. Dette er nøyaktig det samme vi gjorde i forrige utve, med jakobi-determinanten.

$\left| \frac{\partial z}{\partial x_1} \times \frac{\partial z}{\partial x_2} \right|$ er nemlig jakobideterminanten til den parametriserte flaten $z(x)$. Hvorfor det?

Står dere fast, står dette i oppgave 6 i
 forrige ukens LF. Dette var en av eksamens-
 oppgavene våre, så kan være lurt å banke
 dette inn i hodet.



[...]

Elsys-Åsmund!?

(Enkelte tole det
 å banke jakobi-
 determinanter inn i
 hodet, litt for
 bokstavelig...)

7.

Oppgave 2: $F(\theta, h) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ h \end{bmatrix}$, $D \subseteq [0, 2\pi) \times [0, 1]$

$$\therefore A = \iint_D \left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial h} \right\| d\theta dh$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial h} \right\| = \left\| \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \theta} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} & \frac{\partial F_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F_1}{\partial h} & \frac{\partial F_2}{\partial h} & \frac{\partial F_3}{\partial h} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|$$

Triks for
 å ta kryssproduktet.

$$= \left\| \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j} \right\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \underline{\underline{1}}$$

$$\therefore A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} d\theta dh = \underline{\underline{2\pi}}$$

∴ Overflatearekt til en sylinder med radius og høyde lik 1, er lik 2π .

Oppgave 3: $F(\theta, h) = \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}, F: [0, 2\pi) \times [0, \pi]$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial h} \right\| = \left\| \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\theta \sin\phi & \cos\theta \sin\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & \sin\theta \cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \hat{i} [-\cos\theta \sin^2\phi] - \hat{j} [\sin\theta \sin^2\phi] + \hat{k} [-\sin\phi \cos\phi (\sin^2\theta + \cos^2\theta)] \right\|$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta \sin^4\phi + \sin^2\theta \sin^4\phi + \sin^2\phi \cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{\sin^4\phi + \sin^2\phi \cos^2\phi} = \sqrt{\sin^2\phi (\sin^2\phi + \cos^2\phi)}$$

$$= \sin\phi$$

$$\therefore A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sin\phi d\theta d\phi = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi = \underline{\underline{4\pi}}$$

Oppgave 4: $F(\theta, h) = \begin{bmatrix} (40h-4)(h-1)^4 \cos\theta \\ (40h-4)(h-1)^4 \sin\theta \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(h) \cos\theta \\ p(h) \sin\theta \\ h \end{bmatrix}$

$$F: [0, 2\pi) \times \left[\frac{1}{10}, 1\right]$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial h} \right\| = \left\| \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -p(h) \sin\theta & p(h) \cos\theta & 0 \\ p'(h) \cos\theta & p'(h) \sin\theta & 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \hat{i} \cdot p(h) \cos\theta + \hat{j} \cdot p(h) \sin\theta + \hat{k} \cdot \left[-p(h)p'(h) \sin^2\theta - p(h)p'(h) \cos^2\theta \right] \right\|$$

$- p(h)p'(h)$

$$= \sqrt{p(h)^2 \cos^2\theta + p(h)^2 \sin^2\theta + p'(h)^2 p(h)^2}$$

$$= \sqrt{p(h)^2 + p(h)^2 p'(h)^2} = p(h) \sqrt{1 + p'(h)^2}$$

$$\therefore A = \int_{\frac{1}{10}}^1 \int_0^{2\pi} p(h) \sqrt{1 + p'(h)^2} d\theta dh$$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{10}}^1 p(h) \sqrt{1 + p'(h)^2} dh$$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{10}}^1 (40h-4)(h-1)^4 \cdot \sqrt{1 + 40(h-1)^4 + (40h-4)^2 (h-1)^3} dh$$

Her skal jeg ærlig innrømme at jeg har
null peiling på hva Nome tenkte. Så vi
sier at √: lar denne være en oppgave
til kseren ☺

Geogebra gav selv konket. Så python-scriptet
mitt påstår at:

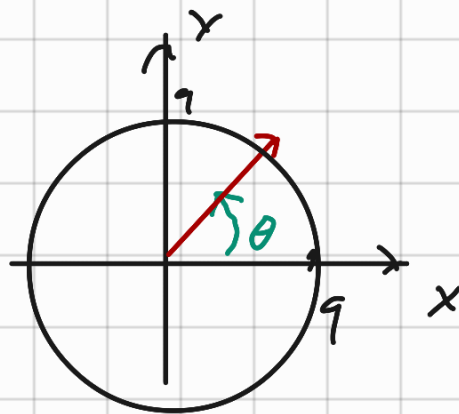
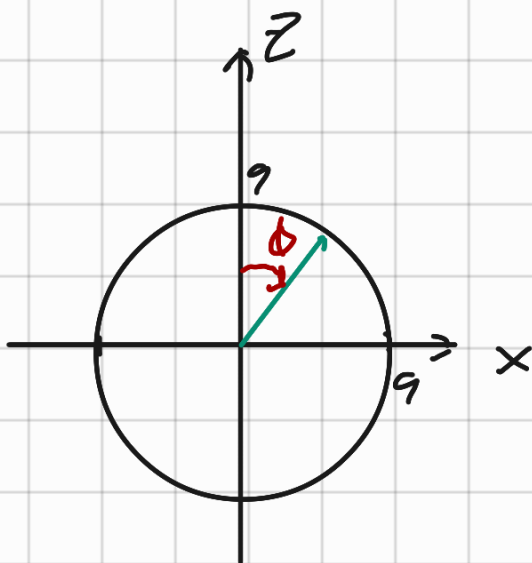
$$\underline{\underline{A \approx 100.17}}$$



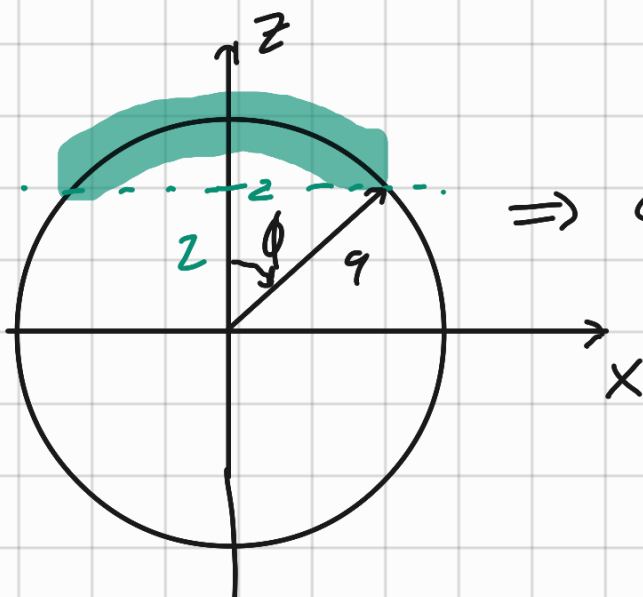
Elsys-Åsmund på rømmen fra
studass-Anders etter sine grove
handlinger.

8. $x^2 + y^2 + z^2 = 9^2$ tilsvarende en kule
 Sentret i origo med radius 3.

$$\therefore \mathbb{X}(\theta, \phi) = 9 \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}$$



Delen av kuler over $z=2$ finner vi
 dermed slik:



$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{2}{9} \Rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{2}{9}\right)$$

Dermed vil $\mathbb{X}: [0, 2\pi] \times [0, \arccos(\frac{2}{9})]$

Jeg kunne vist det, men jacobideterminanten til parametrisering av et kule skall med radius r , er $r^2 \sin \phi$. Dette finner man ved alleiral samme metode som 7.3

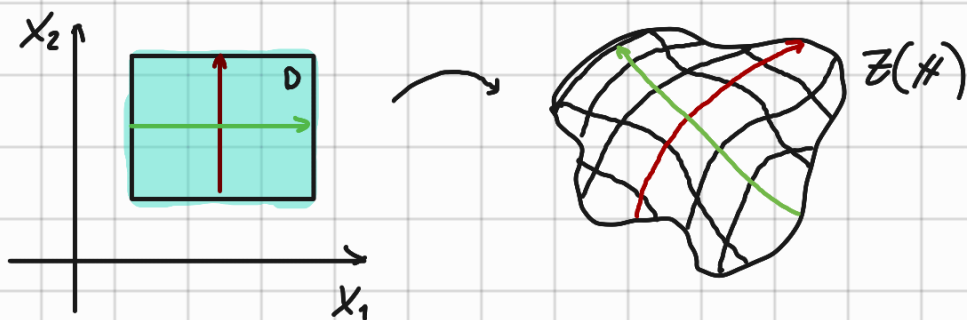
$$\therefore A = \int_0^{\arccos(\frac{2}{9})} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \phi d\theta d\phi = 162\pi \int_0^{\arccos(\frac{2}{9})} \sin \phi d\phi$$

$$= 162\pi \left[-\cos(\phi) \right]_{\phi=0}^{\phi=\arccos(\frac{2}{9})} = 162\pi \left[-\frac{2}{9} + 1 \right]$$

$$= 162\pi \left[\frac{7}{9} \right] = 18 \cdot 7\pi = \underline{\underline{126\pi}}$$

9.

Vi har et område D slik illustrert under, og en korresponderende flate til høyre:



Retningen på den **røde** linjen kan for små nok dx_1 og dx_2 tenkes på som $\frac{\partial z}{\partial x_1}$. På samme måte, vil retningen på den **grønne** linjen ha retning $\frac{\partial z}{\partial x_2}$. For små nok dx_1 og dx_2 vil

transformasjonen se linear ut. i.e. at linjer krysser med 90° dersom de gjorde det i D .

Vi kan derfor tenke oss at dette er en lineartransformasjon for små nok dx_1 og dx_2 . Derfor vil arealendringen fra D til flaten være gitt ved absoluttverdien av kryssproduktet mellom de transformerte vektorene. For å få det totale arealet, integrerer vi over D med den skalerende faktoren;

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2$$

Dette var hentet fra eksamen min i Spør. Dersom vi ønsker å finne massen til dette arealet, ganger vi bare med massetettheten:

$$\iint_D \rho(\mathbf{z}(x)) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| dx$$

10. Parametrisering av halvt kuleskall:

$$z(\theta, \phi) = r \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ \phi \in [0, \pi/2] \end{array}$$

$$\rho(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad D = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$$

Formel for massecenter:

$$\frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho(x) x \, ds, \quad M = \iint_D \rho(x) \, ds$$

$$= \frac{1}{M} \iint_D \rho(z(\theta, \phi)) z(\theta, \phi) \left\| \frac{\partial z}{\partial \theta} \times \frac{\partial z}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

$$, M = \iint_D \rho(z(\theta, \phi)) \left\| \frac{\partial z}{\partial \theta} \times \frac{\partial z}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

$$\left\| \frac{\partial z}{\partial \theta} \times \frac{\partial z}{\partial \phi} \right\| = r^2 \sin\phi$$

$$\therefore M = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} c r^2 \sin\phi \, d\theta d\phi = 2\pi c \left[-\cos\phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2}$$

$$= 2\pi c$$

Massesenter blir da:

$$\frac{1}{2\pi c} \iint_D C r \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix} r^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{r^3}{2\pi} \iint_{00}^{\pi/2 2\pi} \begin{bmatrix} \cos\theta \sin^2\phi \\ \sin\theta \sin^2\phi \\ \frac{1}{2} \sin(2\phi) \end{bmatrix} d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{r^3}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} \sin\theta \sin^2\phi \\ -\cos\theta \sin^2\phi \\ \frac{1}{2} \sin(2\phi) \theta \end{bmatrix}_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\phi = \frac{r^3}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{2} \sin(2\phi) \end{bmatrix} d\phi$$

$$= \frac{r^3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \cos(2\phi) \end{bmatrix}_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = \frac{r^3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

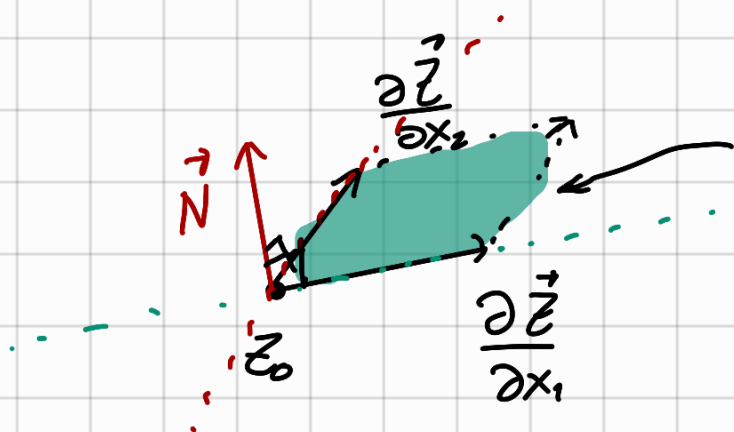
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r^3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$

11. Ettersom $\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1}$ beskriver hvor vi beveger oss dersom vi gjør en liten endring i x_1 ,

kan dette tenkes på som en tangentvektor som spenner ut en linje som vi ville gått langs, hadde stigningen vært konstant.

Det samme gjelder for $\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}$, men vil vanligvis følge i en annen retning

En $\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1}$. Hvis vi tegner opp disse:



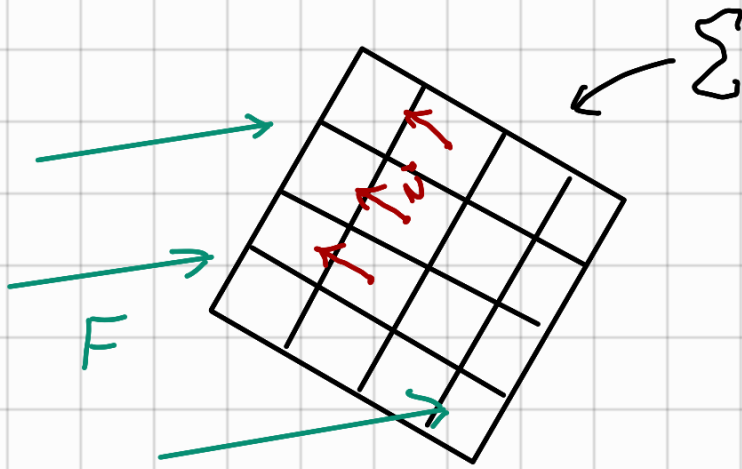
En tilnærming av flata til z rundt punktet z_0 .

Dersom vi er interessert i normalvektor til denne tilnærmede flaten, husker vi fra videregående, at vi kan bruke kryssproduktet.

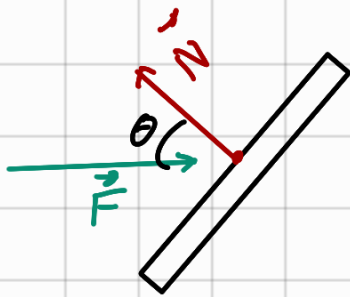
Enhetsnormalvektor får vi ved å dele på lengden av denne vektoren:

$$\vec{N} = \frac{\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}}{\left\| \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2} \right\|}$$

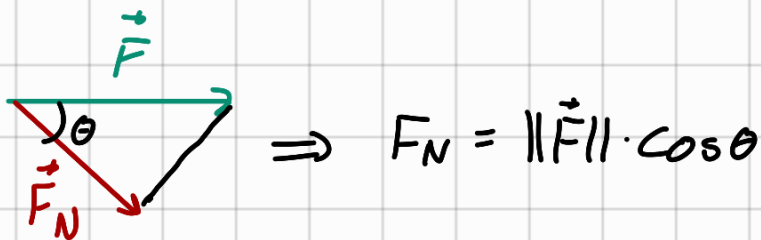
12.



Sett på et lite kvadrat fra siden:



Vi er interessert i komponenten av \vec{F} som går vinkelrett gjennom flaten Σ , \vec{F}_N



Siden $\|\vec{N}\| = 1 \Rightarrow F_N = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{N}\| \cos \theta$

$$\therefore F_N = \vec{F} \cdot \vec{N} \quad \square$$

Ettersom vi vil ha total fluks gjennom en vilkårlig flate Σ , integrerer vi den punktvise fluksen:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{N} ds$$

Hvis vi parametriserer flaten med $z: D \rightarrow \Sigma$, vet vi at arealelementet $ds = \left| \frac{\partial z}{\partial x_1} \times \frac{\partial z}{\partial x_2} \right| dx$

$$\therefore \iint_D \underbrace{F(\vec{z}(x)) \cdot \vec{N}}_{\left| \frac{\partial z}{\partial x_1} \times \frac{\partial z}{\partial x_2} \right|} dx$$

Normalvektor med lengde

$\left| \frac{\partial z}{\partial x_1} \times \frac{\partial z}{\partial x_2} \right|$. Dette er jo det

Samme som $\frac{\partial z}{\partial x_1} \times \frac{\partial z}{\partial x_2}$ i

$$\iint_D F(\vec{z}(x)) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} \times \frac{\partial z}{\partial x_2} dx$$

$$13. \quad E(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

Parametrisering for kuleskall med radius r :

$$\mathbf{z}(\theta, \phi) = r \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ \phi \in [0, \pi] \end{array}$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -r \sin\theta \sin\phi & r \cos\theta \sin\phi & 0 \\ r \cos\theta \cos\phi & r \sin\theta \cos\phi & -r \sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= -r^2 \begin{bmatrix} \cos\theta \sin^2\phi \\ \sin\theta \sin^2\phi \\ \sin\phi \cos\phi \end{bmatrix}$$

Merke at denne vektor
peker innover mot origo
for alle verdier av
 θ og ϕ . Vi er interessert
i flatesen utover og må
derfor invertere resultatet.

$$\|\mathbf{z}(\theta, \phi)\| = r \sqrt{\cos^2\theta \sin^2\phi + \sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\phi}$$

$$= r \sqrt{(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \sin^2\phi + \cos^2\phi}$$

$$= r \sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi} = r$$

Total flux:

$$\iint_D E(z(\theta, \phi)) \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \times \frac{\partial z}{\partial \phi} d\theta d\phi$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_D \frac{1}{\|z(\theta, \phi)\|^3} z(\theta, \phi) \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \times \frac{\partial z}{\partial \phi} d\theta d\phi$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_D \frac{1}{r^3} \cdot r \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix} (r^2) \begin{bmatrix} \cos\theta \sin^2\phi \\ \sin\theta \sin^2\phi \\ \sin\phi \cos\phi \end{bmatrix} d\theta d\phi$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_D [\cos^2\theta \sin^3\phi + \sin^2\theta \sin^3\phi + \sin\phi \cos^2\phi] d\theta d\phi$$

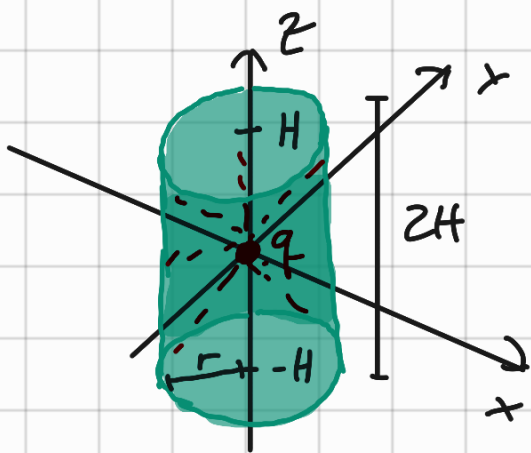
$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_D \sin\phi d\theta d\phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\phi d\theta d\phi$$

$$= -\frac{q}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\phi d\phi = -\frac{q}{2\epsilon_0} [-\cos\phi]_0^\pi = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

Siden normalvektoren v r p let innover, vil dette si at fluxen inn i kule er $-\frac{q}{\epsilon_0}$. Med andre ord er fluxen ut av kule

$\frac{q}{\epsilon_0}$ (Dette stemmer jo fint overens med maxwells første lov)

14. $E(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$



Sylinder med høyde $2H$, sentret i origo.
Åpen øppe og nede.
Radius r

$$\therefore Z(\theta, h) = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ h \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} h &\in [-H, H] \\ \theta &\in [0, 2\pi) \\ \Sigma &= [-H, H] \times [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Fluksen er da gitt ved:

(7a, det er faktisk gyldig å bruke 1 integraltegn)

$$\int_{\Sigma} E(\mathbf{x}) \cdot N(\mathbf{x}) dS = \int_{-H}^H \int_0^{2\pi} E(Z(h, \theta)) \cdot \frac{\partial Z}{\partial \theta} \times \frac{\partial Z}{\partial h} d\theta dh :$$

$$\frac{\partial Z}{\partial h} \times \frac{\partial Z}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} \cdot r \cos \theta + \hat{j} \cdot r \sin \theta = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\int_{-H}^H \int_0^{2\pi} E(\mathbf{z}(\theta, h)) \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial h} d\theta dh$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-H}^H \int_0^{2\pi} \frac{1}{\|\mathbf{z}(\theta, h)\|^3} \underbrace{\begin{bmatrix} r \cos\theta \\ r \sin\theta \\ h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \cos\theta \\ r \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}}_{r^2} d\theta dh$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-H}^H \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{\|\mathbf{z}(\theta, h)\|^3} d\theta dh$$

$$\|\mathbf{z}(\theta, h)\| = \sqrt{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta + h^2} = \sqrt{r^2 + h^2}$$

⇓

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-H}^H \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + h^2}^3} d\theta dh = \frac{q r^2}{2\epsilon_0} \int_{-H}^H \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}^3} dh$$

Wolfram alpha gir: $\left(\begin{array}{l} \text{Det er godt mulig man krever} \\ \text{visstnok noen syke variabelsub} \\ \text{stitusjoner} \end{array} \right)$

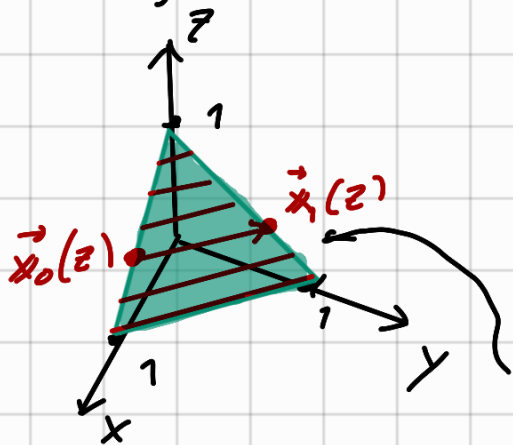
$$= \frac{q r^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{h}{r^2 \sqrt{h^2 + r^2}} \right]_{h=-H}^{h=H} = \frac{q}{2\epsilon_0} \cdot \frac{2H}{\sqrt{H^2 + r^2}}$$

$$= \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2}}$$

MERK! Hvis vi lar $H \rightarrow \infty$,
vil flukksen gå mot $\frac{q}{\epsilon_0}$ som
er det vi forventer fra Maxwell's
likninger!

15.

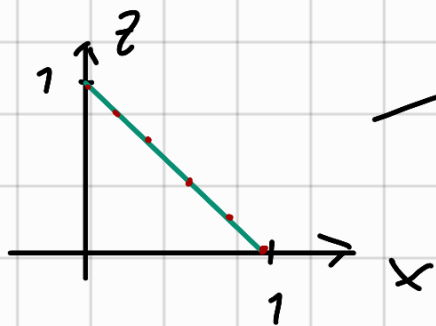
I denne oppgaven er det lett å gå i fella av hvordan man parametriserer flate. Det gjorde hvittfall jeg 😊



Hvis vi fastsetter at en av våre parametre er høyden z , kan vi jobbe med å representere de røde linjene basert på z :

$$z \in [0, 1]$$

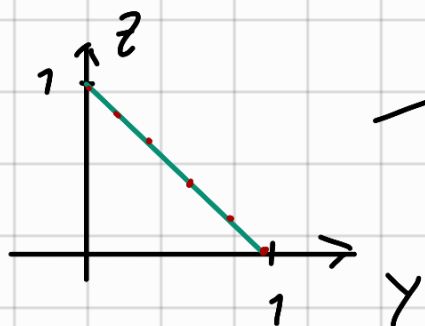
Ser på trekanten fra siden:



$$z = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - z$$

$$\text{Dermed blir } \vec{x}_0(z) = \begin{bmatrix} 1 - z \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

Gjør samme for y og z :



$$z = 1 - y \Leftrightarrow y = 1 - z$$

$$\text{Dermed blir } \vec{x}_1(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - z \\ z \end{bmatrix}$$

Vektoren tegnet i figuren, altså linjen mellom ytterpunktene finner man ved:

$$\vec{X}_1(z) - \vec{X}_0(z) = \begin{bmatrix} z-1 \\ 1-z \\ 0 \end{bmatrix}$$

For å representere alle punktene langs vektoren, ganger vi med et tall mellom $[0, 1]$:

$$\begin{bmatrix} z-1 \\ 1-z \\ 0 \end{bmatrix} \cdot t, \quad t \in [0, 1]$$

Dermed for å representere den røde linjen for alle z (altså flaten), må vi forflytte den opp til punktet der den starter ved å legge til $\vec{X}_0(z)$:

$$\begin{aligned} f(t, z) &= \underline{\vec{X}_0(z)} + \left[\vec{X}_1(z) - \vec{X}_0(z) \right] \cdot t \\ &= \begin{bmatrix} 1-z + (z-1)t \\ 0 + (1-z)t \\ z \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} (1-z)(1-t) \\ (1-z)t \\ z \end{bmatrix}}}, \quad \begin{matrix} z \in [0, 1] \\ t \in [0, 1] \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ z-1 & 1-z & 0 \\ t-1 & -t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-z \\ 1-z \\ (1-z)t + (1-t)(1-z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-z \\ 1-z \\ 1-z \end{bmatrix} = (1-z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Denne står normalt på flata, og peker utover.

$$\|S(t, z)\| = \sqrt{(1-z)^2(1-t)^2 + (1-z)^2 t^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{(1-z)^2(1-2t+2t^2) + z^2}$$

Fluks blir da:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-z)((1-z)(1-t) + (1-z)t + z)}{\sqrt{(1-z)^2(1-2t+2t^2) + z^2}^3} dt dz$$

$$\approx \underline{\underline{0.13}} \cdot \frac{q}{\epsilon_0}$$

Dette kan imidlertid virke å være for høyt, da det er mindre enn $\frac{q}{\epsilon_0}$.