Jule/Nyttår/Whatever-integral 5

January 10, 2006

"Dagens" integral er som vi husker fra før nyttår litt tricky.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{1}$$

Her er det tydelig at vi må ty til et triks for å komme noen vei. I stedet for å regne ut

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{2}$$

skal vi regne ut

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{3}$$

Siden dette er to separate integraler kan vi like godt se på det som

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y \tag{4}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5}$$

Her ser vi at vi har fått oss en fin eksponent, som praktisk talt trygler oss om å bytte til polarkoordinater. Vi bruker vanlige, fine koordinattransformasjoner:

$$x = r\cos\phi \tag{6}$$

$$y = r\sin\phi \tag{7}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{8}$$

Så må vi på et eller annet vis gå fra dxdy til noe som involverer de nye koordinatene. Det kan vi gjøre på to forskjellige måter, og her, som i alt annet, er det alltid best å bruke skyte-spurv-med-krysser-raketter-metoden, for å venne seg til å bruke krysser-raketter.

Vi har

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |\det J|\mathrm{d}U\mathrm{d}V \tag{9}$$

der J er Jacobi-matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}U} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}U} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}V} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}V} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Med de vanlige, koselige koordinattransformasjonene vi bruker har vi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = \cos\phi \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} = \sin\phi \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi} = -r\sin\phi \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = r\cos\phi \tag{14}$$

Dette gir oss

$$J = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\sin\phi & r\cos\phi \end{bmatrix} \tag{15}$$

og

$$|\det J| = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r \tag{16}$$

Dermed får vi at

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \tag{17}$$

Den andre måten vi kunne funnet dette på er en enkel geometrisk betraktning. dxdy er jo arealelementet i kartesiske koordinater. I polarkoordinater er arealelementet rdrdϕ, som man finner ved å bruke at $\sin x \approx x$ når $x \ll 1$.

For å returnere til oppgaven skal vi altså integrere over første kvadrant, som gir oss, med alle transformasjoner og koordtinatbytter

$$\int_o^\infty re^{-r^2}\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\phi \tag{18}$$

$$= \pi \left[-e^{-r^2} \right]_0^\infty \tag{19}$$

$$= \pi \tag{20}$$

Helt til slutt må vi huske at det vi regnet ut var I^2, derfor blir svaret på den opprinnelige oppgaven

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{21}$$

I morgen:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \tag{22}$$