Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653, mobil 90 07 51 72

Eksamen i fag FY2450 Astrofysikk
Onsdag 20. mai 2009
Tid: 9.00–13.00

Sensurfrist: Onsdag 10. juni 2009

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, matematiske og fysiske tabeller.

En tabell over fysiske konstanter finnes sist i dette oppgavesettet.
Alle deloppgaver teller likt ved sensuren.

Oppgave 1:

a) Nevn noen karakteristiske forskjeller mellom kuleformede stjernehoper (eller kulehoper, engelsk: globular clusters), på den ene siden, og åpne stjernehoper (eller galaktiske hoper, engelsk: open clusters, galactic clusters), på den andre siden.

b) Hvilke observerbare forskjeller er det mellom stjernene i kulehoper (populasjon II) og stjernene i åpne hoper (populasjon I)?

Hvordan forklares de observerte forskjellene teoretisk?

c) Harlow Shapley studerte hvordan de kuleformede stjernehopene fordeler seg i det tredimensjonale rommet, og brukte det til å lokalisere sentrum i vår galakse, Melkeveien.

Forklar kort hvordan.

Oppgave 2:

a) Hubble-*konstanten* H_0 er den nåværende verdien av Hubble-*parameteren* H, som er tidsavhengig. Verdien $H_0 = 70\,(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}$ antas å være korrekt innenfor $\pm 5\,\%$.

Hva er Hubbles lov, og hvordan måler vi H_0?

Hubble-tiden $1/H_0$ er omtrent lik alderen til universet. Hvorfor?

Hvor mange år er Hubble-tiden $1/H_0$?

At Hubble-tiden er nesten eksakt lik alderen til universet, i følge de nyeste resultatene i kosmologien, regnes som et tilfeldig sammentreff.

b) Friedmann-modellen for universet forutsetter at massetettheten ρ og energitettheten ρc^2 er konstante i rommet, men varierer med tiden.

Observasjoner, bl.a. av fluktuasjonene i den kosmiske bakgrunnstrålingen, tyder på at universet kan beskrives med en Friedmann-modell der det tredimensjonale rommet er flatt. Betingelsen for at det tredimensjonale rommet er flatt, er at massetettheten ρ har en verdi som er nøyaktig lik den kritiske verdien

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \ .$$

Den nåværende verdien av den kritiske massetettheten er

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 9{,}2 \ 10^{-27} \ \mathrm{kg/m^3} \ .$$

Hva blir den tilsvarende kritiske energitettheten $\rho_{c0}c^2$?

Hva er ρ_{c0} uttrykt i solmasser pr. (lysår)^3 ?

Hvis en typisk galakse har 10^{11} solmasser, hva blir den gjennomsnittlige avstanden mellom galaksene dersom galaksene alene utgjør hele den kritiske massetettheten ρ_{c0} ?

Kommentar?

c) Et elektromagnetisk felt i vakuum med elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetisk flukstetthet $\vec{B}$ har en energitetthet som er

$$\rho_{em}c^2 = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}\right) .$$

Dersom energitettheten i et rent elektrisk felt er lik den kritiske energitettheten for universet, $\rho_{c0}c^2$, hvor stor er da $|\vec{E}|$?

Dersom energitettheten i et rent magnetisk felt er $\rho_{c0}c^2$, hvor stor er da $|\vec{B}|$?

Kommentar?

d) Termisk elektromagnetisk stråling med temperatur T har en energitetthet som kan uttrykkes som et integral over frekvensen ν,

$$\rho_{em}c^2 = \int_0^\infty \mathrm{d}\nu \ \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \ f \ ,$$

der

$$f = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

er okkupasjonstallet i en fotontilstand med frekvens ν. Ved null temperatur, dvs. i grensen $T \to 0$, blir $f = 0$. Men når vi setter $f = 0$ ved $T = 0$, så regner vi ikke med vakuumenergien i det kvantiserte elektromagnetiske feltet.

En kvantemekanisk harmonisk oscillator med frekvens ν har energinivåer

$$E_n = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{med} \qquad n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

I grunntilstanden, med $n = 0$, har oscillatoren en positiv energi $E_0 = h\nu/2$.

Tettheten av vakuumenergi, $\rho_{\rm v} c^2$, finner vi altså ved å sette $f = 1/2$ i integralet ovenfor. Problemet er at vakuumenergitettheten blir uendelig,

$$\rho_{\rm v} c^2 = \int_0^\infty d\nu \, \frac{4\pi h\nu^3}{c^3} = \infty \; .$$

Fysisk sett gir det liten mening å integrere helt opp til uendelig høy frekvens.
Det har i hvert fall ingen mening å inkludere bølgelengder mindre enn Planck-lengden

$$L_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,6 \; 10^{-35} \text{ m} \; ,$$

siden vi der ganske sikkert trenger en (hittil ukjent) kvanteteori for gravitasjon.

Vi får et endelig svar hvis vi integrerer bare opp til en endelig maksimal frekvens ν_2. Hvis vi for eksempel kutter av frekvensintegralet ved frekvensen

$$\nu_2 = \frac{c}{L_P} \; ,$$

hva blir da tettheten av vakuumenergi for det elektromagnetiske feltet?

Kommentar?

Oppgave 3:

Den nest klareste stjernen i stjernebildet Vekten (Libra) kalles α Librae, selv om den burde hete β i følge navnekonvensjonen. Det arabiske navnet Zubenelgenubi (den sørlige kloen, dvs. Skorpionens sørlige klo) gjør den til en publikumsfavoritt, men den er interessant også av andre grunner enn navnet.
Nærmere studier tyder på at den er et stjernesystem med tilsammen 5 stjerner.
Med teleskop kan den løses opp i følgende tre komponenter:

Navn	Størrelsesklasse	Spektralklasse
A eller α_2	2,8	A3
B eller α_1	5,2	F4
C	13,2	

Siden de tre stjernene A, B og C har omtrent samme avstand, 77 lysår = 23,6 parsec, og omtrent samme hastighetsvektor, slutter vi at de går i bane rundt hverandre.

a) Hva er den absolutte størrelsesklassen (absolutte magnituden) M til hver av de tre stjernene A, B og C?

Kan du gjette på hvilken spektralklasse den lyssvakeste stjernen, C, tilhører? Begrunn svaret.

b) Vinkelavstanden er 231″ mellom A og B, 276″ mellom A og C, og 111″ mellom B og C.

Beregn en omtrentlig omløpstid (periode) for to av disse stjernene, forutsatt at de går i bane rundt hverandre.

Merk at det spørres etter en størrelsesorden, ikke en eksakt verdi.

c) Hvis en fotograferer de tre stjernene gjennom et teleskop, hvor stort må teleskopet være for at fotografiet skal vise alle tre adskilt?

Hvor stort må teleskopet være, og hvor stor forstørrelse må en bruke, for at en skal kunne se alle de tre stjernene med øyet gjennom teleskopet?

En huskeregel er at et teleskop med objektivdiameter 10 cm har en vinkeloppløsning på 1″, som er den grensen som settes av at turbulens i atmosfæren gjør bildet uskarpt.

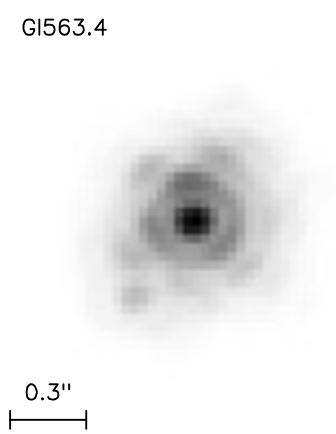
Anta at lysåpningen i øyet er 5 mm. Stjerner av størrelsesklasse $m = 6$ er så vidt synlige med øyet, uten teleskop.

d) B-stjernen, α_1, er en spektroskopisk dobbeltstjerne, der spektrallinjene fra bare den ene stjernen er synlige. Ved hjelp av et teleskop med adaptiv optikk som korrigerer for turbulens i atmosfæren, Canada–France–Hawaii Telescope (CFHT), er de to komponentene av dobbeltstjernen observert i en vinkelavstand på 0,38″. Se figur 1.

Perioden er 5870 dager. Bruk disse dataene til å beregne (omtrentlig) summen av massene til de to stjernene.

Er den massen du beregner, noenlunde konsistent med spektralklassen F4 til den mest lyssterke stjernen av de to, gitt at den er en hovedseriestjerne? Begrunn svaret kort.

Til sammenligning: en F4 hovedseriestjerne har overflatetemperatur ca. 1000 K høyere enn Sola, som tilhører spektralklassen G2.



Figur 1: Et negativbilde av α_1 Librae (= Gl563.4 = Zubenelgenubi B) fotografert med CFHT i februar 1999. Sekundærstjernen nederst til venstre.

e) Historien slutter ikke der, for A-stjernen, α_2, ser også ut til å være en dobbeltstjerne, som består av to nesten identiske stjerner av samme spektralklasse, A3. Vinkelavstanden mellom dem er bare 0,01″.

Hvor stor er avstanden mellom dem, målt i astronomiske enheter, AU?

Hvis vi antar at de to stjernene har samme lysstyrke, hva er størrelsesklassen til hver av dem separat, når størrelsesklassen til de to tilsammen er 2,8 ?

f) En vinkelavstand på 0,01″ er så liten at bare en helt spesiell teknikk kan brukes til å vise at α_2 består av to stjerner. En gang iblant blir Zubenelgenubi okkultert (skjult) av Månen, og da forsvinner først den ene og så den andre av de to stjernene bak Månen.

Hvor stort er tidsintervallet mellom okkultasjonen av de to stjernene med vinkelavstand 0,01″ ?

g) Når vi observerer to stjerner som går i bane rundt hverandre, kan det hende at vi observerer bare ett punkt på banen, ofte fordi perioden for et helt omløp er svært lang. Da er det vanlig å anta, som vi også gjør i denne oppgaven, at hvis vi måler en vinkelavstand γ, og avstanden til de to stjernene er d, så er banen en ellipsebane med store halvakse $a = \gamma d$.

Formelen $a = \gamma d$ er faktisk en god tilnærming, den har ganske stor sannsynlighet for å gi en verdi som ikke avviker mer enn for eksempel 10 % fra den korrekte verdien.

Forklar kort hvorfor. Det er nok å gi et kvalitativt argument.

Noen fysiske konstanter og formler

Newtons gravitasjonskonstant:	$G = 6{,}673 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Lyshastigheten i vakuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Permeabiliteten i vakuum:	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
Permittiviteten i vakuum:	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
Den reduserte Plancks konstant:	$\hbar = h/(2\pi) = 1{,}055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Elementærladningen:	$e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Finstrukturkonstanten:	$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137{,}036$
Boltzmanns konstant:	$k = k_B = 1{,}3807 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Stefan–Boltzmanns konstant:	$\sigma = 5{,}6704 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^4)}$
Elektronmassen:	$m_\mathrm{e} = 9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0,511\,\mathrm{MeV}/c^2$
Protonmassen:	$m_\mathrm{p} = 1{,}6726 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938,28\,\mathrm{MeV}/c^2$
Nøytronmassen:	$m_\mathrm{n} = 1{,}6749 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 939,57\,\mathrm{MeV}/c^2$
Jordmassen:	$M_\oplus = 5{,}974 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Jordradien:	$R_\oplus = 6{,}378 \times 10^{3}\,\mathrm{km}$
Solmassen:	$M_\odot = 1{,}9891 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Solradien:	$R_\odot = 6{,}960 \times 10^{5}\,\mathrm{km}$
Avstanden til Sola (en astronomisk enhet):	$1\,\mathrm{AU} = 1{,}4960 \times 10^{8}\,\mathrm{km}$
Hubble-konstanten:	$H_0 = 70\,(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}$
	1 pc = 1 parsec = 3,26 lysår
	1 lysår = $9{,}46 \times 10^{15}$ m

Keplers tredje lov for masser m_1 og m_2 i en ellipsebane med store halvakse a og periode P:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} \; .$$

Stefan–Boltzmanns lov (fluks F av svart stråling med temperatur T): $F = \sigma T^4$.

Relasjon mellom tilsynelatende størrelsesklasse (tilsynelatende magnitude) m og absolutt størrelsesklasse (absolutt magnitude) M for en stjerne i avstand d:

$$m - M = 5\ \log_{10}\left(\frac{d}{10\ \mathrm{parsec}}\right) .$$

For to stjerner 1 og 2 gjelder følgende relasjoner:

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 \ &= \ 2{,}5\ \log_{10}\left(\frac{b_1}{b_2}\right) , \\ M_2 - M_1 \ &= \ 2{,}5\ \log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2}\right) . \end{aligned}$$

Der b er tilsynelatende lysstyrke (engelsk: brightness) og L er luminositet (absolutt lysstyrke).