Innleveringsøving (prøveeksamen) for FY2450 Astrofysikk, våren 2010

Innlevering til retting er ikke obligatorisk, men anbefales.
Lever f.eks. på forelesning, på mitt kontor (Jan Myrheim, rom nr. E5-102) eller i min posthylle på postrommet til Institutt for fysikk, i 3. etasje.
Det er tillatt å levere svar på bare noen oppgaver, og å levere i flere omganger!

Et godt generelt råd til eksamen (og ellers) er at nøyaktighet lønner seg.
Legg vekt på å forklare tydelig hvordan du løser oppgavene, og vær nøye med bruk av enheter. Riktig svar gir full uttelling, men feil svar med en god forklaring gir bedre uttelling enn feil svar uten forklaring!
Tenk over nøyaktigheten av tallsvar, en god regel er å angi svaret slik at det siste sifferet er usikkert. Ved rettingen vil slike detaljer bli lagt vekt på.

1) Pr. 22. mars 2010 er det observert 442 planeter utenfor vårt eget solsystem. Her er tabeller over noen av dem og de stjernene de går i bane rundt. $R_\odot$ er solradien og $M_\odot$ er solmassen. Den astronomiske enheten er store halvakse i banen til Jorda rundt Sola. Overflatetemperaturen til en stjerne er den effektive temperaturen, som tilsvarer at stjernen stråler som et svart legeme.

Stjerne	Avstand parsec	Spektralklasse,	overflatetemperatur	Radius $R_\odot$	Masse $M_\odot$
Fomalhaut	7,7	A3 V	8540 K	1,82	2,06
HD 160691	15,3	G3 IV-V	5700 K	1,25	1,08
61 Vir	8,52	G5 V	5531 K	0,94	0,95
Gliese 581	6,26	M3 V	3480 K	0,38	0,31
Gliese 876	4,7	M4 V	3350 K	0,36	0,33

Stjerne	Planet	Masse Jupitermasser	Store halvakse Astronomiske Enheter	Eksentrisitet
Fomalhaut	b	< 3	115	0,11
HD 160691	c	0,03321	0,09094	0,17
HD 160691	d	0,5219	0,921	0,067
HD 160691	b	1,676	1,50	0,128
HD 160691	e	1,814	5,235	0,10
61 Vir	b	0,016	0,050201	0,12
61 Vir	c	0,057	0,2175	0,14
61 Vir	d	0,072	0,476	0,35
Gliese 581	e	0,00610	0,03	0
Gliese 581	b	0,0492	0,041	0
Gliese 581	c	0,01686	0,07	0,17
Gliese 581	d	0,02231	0,22	0,38
Gliese 876	d	0,02	0,021	0,14
Gliese 876	c	0,83	0,132	0,266
Gliese 876	b	2,64	0,211	0,029

Forklar kort prinsippet for hvordan en kan oppdage planeter som går i bane rundt en stjerne ved å studere stjernespektret og bruke Doppler-effekten.
Utled følgende formel for temperaturen T_p på en planet i avstand d fra en stjerne, når stjernen har overflatetemperatur T_s og radius R_s,

$$T_p = T_s \sqrt{\frac{R_s}{2d}} \sqrt[4]{\frac{1-a_v}{1-a_{\mathrm{ir}}}} \,. \tag{1}$$

Planeten har albedo a_v for synlig lys, dvs. for lyset fra stjernen, og albedo a_{ir} for infrarød stråling, som stråles ut fra planeten.
Anta (i mangel av en bedre antagelse) at $a_v = a_{\mathrm{ir}}$, og bruk formelen til å beregne overflatetemperaturen på planetene som er listet opp i tabellen.
Er det nødvendig å ta hensyn til at noen av planetene har nokså eksentriske ellipsebaner?
Ville du velge noen av planetene som mål for en feriereise?
Beregn både absolutt og tilsynelatende størrelsesklasse (magnitude) for de fem stjernene i tabellen, gitt at Sola har absolutt størrelsesklasse 4,8 og overflatetemperatur 5762 K.
Hvilke av stjernene kan ses uten teleskop?

2) Normalt atmosfæretrykk ved havnivå er (pr. definisjon) en atmosfære.
Et trykk på en atmosfære er nesten nøyaktig 10^5 pascal = 10^5 N/m^2 (normalt atmosfæretrykk er definert som 101 325 pascal).
Hvor stor masse har luftlaget over 1 m^2 av jordoverflaten?
Hva er den totale massen til jordatmosfæren?
Hvor stor brøkdel er det av massen til Jorda?

3) La oss prøve å bruke de ligningene som brukes til å beregne den indre strukturen av Sola, på atmosfæren til Jorda.
Hva er trykket på toppen av Galdhøpiggen (2469 meter over havet)?
På toppen av Mont Blanc (4807 moh)?
På toppen av Chomolungma (mer kjent som Mount Everest, 8848 moh)?
Anta at luft er en ideal gass, at temperaturen T er konstant, og at tyngdens akselerasjon g er konstant lik $9,8$ m/s^2.
Er det en rimelig antagelse at temperaturen er konstant?
I oppgave 5) nedenfor foreslås en annen måte å regne på.
Tilstandsligningen for en ideal gass er

$$P = \frac{\rho k_B T}{\overline{m}} \,, \tag{2}$$

der P er trykket, ρ er massetettheten, $\overline{m}$ er den gjennomsnittlige massen av gasspartiklene, og k_B er Boltzmanns konstant.
Betingelsen for hydrostatisk likevekt er ligningen

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g \,, \tag{3}$$

der z er høyden (høyden over havet, eller avstanden fra sentrum av Jorda).
Løs oppgaven f.eks. ved å utlede en sammenheng mellom P og z av formen

$$P = P_0 \, \mathrm{e}^{-\alpha(z-z_0)} \,, \tag{4}$$

der α, P_0 og z_0 er konstanter.

4) Atmosfæretrykket på Mars er variabelt, typisk 0,6 % av atmosfæretrykket på Jorda. Hvis dette er trykket på det laveste punktet på overflaten av Mars, hva er da trykket på det høyeste punktet, toppen av vulkanen Olympus Mons, som er 31 km høyere?

5) Fønvind (ekstra varm vind) kan vi få i Trondheim f.eks. når det blåser kraftig fra sør. Hvis fuktig luft kommer sørfra og stiger oppover for å komme over Dovre, kan vanndampen falle ned som regn eller snø sør for Dovre, og varmen som frigjøres når vanndampen kondenseres, varmer opp lufta (eller gjør at den avkjøles mindre).
Hva blir temperaturforskjellen mellom et sted på Dovre som er 1100 meter over havet, og et sted i Trondheim 100 meter over havet, dersom sønnavinden er så sterk at lufta ikke får tid til å avkjøles underveis, dvs. at den adiabatiske tilstandsligningen

$$\frac{P}{\rho^{\gamma}} = \text{konstant} \tag{5}$$

gjelder? Den adiabatiske indeksen γ er 7/5 for luft, som er en toatomig gass, N_2 og O_2.
Anta stadig at luft er en ideal gass, og at hydrostatisk likevekt gjelder (tilnærmet), slik at du kan bruke ligningene (2) og (3), bare med den forskjellen at nå er ikke temperaturen konstant.
Som kjent er klimaet sterkt avhengig av høyden over havet, og en tommelfingerregel sier at gjennomsnittstemperaturen avtar med en grad for hver 120 meter over havet.
Sammenlign med svaret på denne regneoppgaven. Kommentar?

6a) La $\vec{g}$ betegne tyngdens akselerasjon i et gravitasjonsfelt. Det betyr at en (liten) masse m faller i gravitasjonsfeltet med akselerasjonen $\vec{g}$, som ikke avhenger av massen m, men som kan variere med tiden t og posisjonen $\vec{r}$. Generelt gjelder altså at $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}, t)$. Tyngdens akselerasjon er minus gradienten av gravitasjonspotensialet $\phi = \phi(\vec{r}, t)$,

$$\vec{g} = -\nabla\phi \ . \tag{6}$$

Gravitasjonspotensialet er bestemt av massetettheten $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ ved Poissons ligning,

$$\nabla^2\phi = -\nabla \cdot \vec{g} = 4\pi G\rho \ , \tag{7}$$

der G er Newtons graviatsjonskonstant. Vi krever gjerne at ϕ skal oppfylle randkravet at $\phi(\vec{r}, t) \to 0$ når $|\vec{r}| \to \infty$.

Vis at hvis gravitasjonsfeltet er rotasjonssymmetrisk om origo, dvs. at $\phi(\vec{r}, t) = \phi(r, t)$ der $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, så er

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) . \tag{8}$$

Det kan for eksempel gjøres som følger. Vis at

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \ , \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \ , \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \ . \tag{9}$$

Beregn deretter

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{10}$$

ved å bruke kjerneregelen for derivasjon, for eksempel at

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \ . \tag{11}$$

6b) Anta at en kuleformet planet har radius R, konstant massetetthet $\rho = \rho_0$ og total masse

$$M = \rho_0 \, \frac{4\pi R^3}{3} \ . \tag{12}$$

Vi velger koordinatsystem med origo i sentrum av planeten. Vi antar at gravitasjonspotensialet er tidsuavhengig og avhenger bare av radien r, altså at $\phi(\vec{r}, t) = \phi(r)$.

Løs Poissons ligning $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ med randkravet $\phi(r) \to 0$ når $r \to \infty$.

Her er et forslag til framgangsmåte.
Ligningen som skal løses er den andreordens ordinære differensialligningen

$$\frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} \right) = \begin{cases} 4\pi G \rho_0 & \text{for} \quad 0 < r < R \ , \\ 0 & \text{for} \quad r > R \ . \end{cases} \tag{13}$$

Finn først den generelle løsningen, med to integrasjonskonstanter, av ligningen

$$\frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} \right) = C \qquad \text{der } C \text{ er konstant.} \tag{14}$$

I området $r < R$ finnes det singulære løsninger, som er slik at $\phi(r) \to \pm\infty$ når $r \to 0$, dem forkaster vi fordi de svarer til at det ligger en punktmasse i origo, og punktmasser finnes bare i teoretiske fysikkbøker.
I området $r > R$ forkaster vi de løsningene som ikke går mot null i det uendelige.
Så må vi skjøte sammen løsningene for $r < R$ og for $r > R$ slik at både $\phi(r)$ og den deriverte $\phi'(r)$ blir kontinuerlige i $r = R$. Hvorfor må $\phi(r)$ og $\phi'(r)$ være kontinuerlige i $r = R$?

6c) Massen innenfor en radius r er

$$M_r(r) = \int_{|\vec{r}'| \le r} \mathrm{d}^3\vec{r}' \ \rho(\vec{r}') = \begin{cases} \rho_0 \, \frac{4\pi r^3}{3} & \text{for} \quad r \le R \ , \\ \rho_0 \, \frac{4\pi R^3}{3} = M & \text{for} \quad r \ge R \ . \end{cases} \tag{15}$$

Vis at tyngdens akselerasjon $g = |\vec{g}| = |\nabla \phi|$ i en avstand r fra sentrum av planeten er

$$g(r) = \frac{G M_r(r)}{r^2} \ . \tag{16}$$

Legg merke til at $g(r)$, både inne i planeten og utenfor, avhenger bare av massen $M_r(r)$ innenfor radien r, og er den samme som om all denne massen var samlet i sentrum.

6d) Betingelsen for hydrostatisk likevekt i en gass eller en væske er at trykket P varierer med posisjonen slik at

$$\nabla P = \rho \vec{g} = -\rho \nabla \phi \ , \tag{17}$$

der ρ er massetettheten og $\vec{g} = -\nabla \phi$ er tyngdens akselerasjon. Sammenlign med ligning (3).

Hvis temperaturen T er den samme overalt, kan vi skrive tilstandsligningen for en ideal gass, ligning (2), som

$$P = K\rho \tag{18}$$

der $K = k_B T/\overline{m}$ er konstant. Vi får da ligningen

$$\nabla \phi = -\frac{\nabla P}{\rho} = -\frac{K}{\rho} \nabla \rho \ , \tag{19}$$

som kan integreres en gang, og gir at

$$\phi_0 - \phi = K \ \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) , \tag{20}$$

der ϕ_0 og ρ_0 er integrasjonskonstanter.
Poissons ligning $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ blir da en ligning for gravitasjonspotensialet ϕ alene,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_0 \, \mathrm{e}^{\frac{\phi_0 - \phi}{K}} \ . \tag{21}$$

Denne ligningen har en løsning av formen

$$\phi(r) = \phi_0 + A \ \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \ , \tag{22}$$

med konstanter A og r_0. Hvilke verdier må disse konstantene ha?
Er denne løsningen meningsfull, fysisk sett? Finnes det andre løsninger?

6e) Den adiabatiske tilstandsligningen for en ideal gass,

$$P = K\rho^{\gamma} \tag{23}$$

der K og γ er konstanter, gjelder i et område der varmetransporten skjer ved konveksjon, for eksempel i det indre av en stjerne, eller i atmosfæren til en planet. Konveksjonsområder der ligningen gjelder, er for eksempel fra soloverflaten og ned til 70 % av solradien, eller i hele det indre av en hovedseriestjerne dersom den har masse mindre enn 0,3 solmasser. Den samme tilstandsligningen gjelder også inne i en hvit dvergstjerne, der trykket kommer fra en degenerert elektrongass.
Den adiabatiske indeksen γ er forholdet mellom varmekapasitetene ved konstant trykk og ved konstant volum. For en ikke-relativistisk enatomig gass er

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{\nu} \qquad \text{med} \qquad \nu = \frac{3}{2} \ . \tag{24}$$

Størrelsen ν kalles *polytropisk indeks.*

Ligningen for hydrostatisk likevekt sammen med den adiabatiske tilstandsligningen gir at

$$\nabla\phi = -\frac{\nabla P}{\rho} = -K\gamma\rho^{\gamma-2}\nabla\rho \; . \tag{25}$$

Denne ligningen kan vi integrere en gang, så vi får ligningen

$$\phi_0 - \phi = K\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\rho^{\gamma-1} = K(\nu+1)\,\rho^{\frac{1}{\nu}} \; . \tag{26}$$

Integrasjonskonstanten ϕ_0 her er gravitasjonspotensialet på overflaten av stjernen, der $\rho \to 0$. Vi skriver nå P_c og ρ_c for trykket og tettheten i sentrum av stjernen, og innfører en dimensjonsløs variabel Θ slik at

$$\rho = \rho_c\Theta^\nu \; , \qquad P = K\rho^\gamma = K{\rho_c}^\gamma\Theta^{\nu\gamma} = P_c\Theta^{\nu+1} \; . \tag{27}$$

Da blir

$$\phi_0 - \phi = K(\nu+1)\,{\rho_c}^{\frac{1}{\nu}}\,\Theta = K(\nu+1)\,{\rho_c}^{\gamma-1}\,\Theta = \frac{(\nu+1)P_c}{\rho_c}\,\Theta \; . \tag{28}$$

Poissons ligning $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ gir nå *Lane–Emden-ligningen*,

$$\nabla^2\Theta = -\frac{\rho_c}{(\nu+1)P_c}\,\nabla^2\phi = -\frac{4\pi G{\rho_c}^2}{(\nu+1)P_c}\,\Theta^\nu \; . \tag{29}$$

Når vi antar rotasjonssymmetri og tidsuavhengighet, slik at $\Theta = \Theta(r)$ og

$$\nabla^2\Theta = \frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\,\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}r}\right) \; , \tag{30}$$

og når vi samtidig innfører den dimensjonsløse radialkoordinaten

$$\xi = \frac{r}{r_0} \qquad \text{der} \qquad r_0 = \sqrt{\frac{(\nu+1)P_c}{4\pi G{\rho_c}^2}} \; , \tag{31}$$

så får vi Lane–Emden-ligningen på den dimensjonsløse formen

$$\frac{1}{\xi^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\,\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\right) + \Theta^\nu = 0 \; . \tag{32}$$

Løsningen kan rekkeutvikles omkring $\xi = 0$. Når polytropindeksen ν er $3/2$, som er det interessante tilfellet for oss her, gir rekkeutviklingen at

$$\Theta = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^4}{80} - \frac{\xi^6}{1440} + \frac{\xi^8}{31\,104} - \frac{19\,\xi^{10}}{14\,256\,000} + \cdots \; . \tag{33}$$

Vi definerte Θ slik at $\Theta(0) = 1$. Tabell 1 gir den numeriske løsningen av ligningen for $\nu = 3/2$. Vi ser av tabellen at $\Theta(\xi) = 0$ for $\xi = \xi_1 = 3,653\,753\,74\ldots$. Uheldigvis blir rekkeutviklingen for unøyaktig når vi nærmer oss nullpunktet ξ_1, så da må vi for eksempel ty til numerisk integrasjon for å løse ligningen.

Vi har nå funnet stjerneradien som funksjon av sentraltettheten ρ_c og sentraltrykket P_c,

$$R = \xi_1 r_0 = 3,654\,\sqrt{\frac{5P_c}{8\pi G{\rho_c}^2}} \; . \tag{34}$$

For å beregne massen M kan vi beregne tyngdens akselerasjon på stjerneoverflaten, $g(R) = GM/R^2$. Generelt for $r \leq R$ er

$$g = g(r) = |\nabla\phi| = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{(\nu+1)P_c}{\rho_c}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}r} = -\frac{(\nu+1)P_c}{\rho_c\, r_0}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{(\nu+1)P_c}{\rho_c\, r_0}\,\Theta'(\xi)\ . \tag{35}$$

Vis at massen kan uttrykkes som

$$M = 4\pi\rho_c r_0^{\,3}(-\xi_1^{\,2}\Theta'(\xi_1))\ . \tag{36}$$

I følge tabell 1 er $-\xi_1^{\,2}\Theta'(\xi_1) = 2,714\,055$.

6f) Sola har radius $R = 7,0 \times 10^5$ km og masse $M = 2,0 \times 10^{30}$ kg.
Ligningene (34) og (36) gjelder ikke nødvendigvis for Sola. Bruk dem likevel for å estimere sentraltrykket P_c og sentraltettheten ρ_c til Sola.
Sammenlign med den midlere tettheten

$$\overline{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}\ . \tag{37}$$

Sammenlign også med følgende fasitsvar (fra detaljerte solmodeller):
$P_c = 2,342 \times 10^{16}$ N/m^2 og $\rho_c = 1,527 \times 10^5$ kg/m^3. Kommentar?

6g) Bruk de oppgitte fasitverdiene for P_c og ρ_c for Sola til å beregne sentraltemperaturen T_c, under forutsetning av at tilstandsligningen for en ideal gass gjelder.
I sentrum av Sola er 34 % av massen i form av hydrogen (mot opprinnelig 71 %), og 64 % av massen er i form av helium (mot opprinnelig 27 %).

Sphere of polytropic index n = 1.5

ξ	θ	θ'	θ^{n+1}	$\xi^2\theta'$
0.000E+00	1.000000E+00	0.000000E+00	1.000000E+00	0.000000E+00
1.000E-01	9.983346E-01	-3.328337E-02	9.958417E-01	-3.328337E-04
2.000E-01	9.933533E-01	-6.626800E-02	9.834660E-01	-2.650720E-03
3.000E-01	9.851007E-01	-9.866007E-02	9.631671E-01	-8.879406E-03
4.000E-01	9.736505E-01	-1.301756E-01	9.354223E-01	-2.082809E-02
5.000E-01	9.591039E-01	-1.605449E-01	9.008741E-01	-4.013622E-02
6.000E-01	9.415881E-01	-1.895169E-01	8.603050E-01	-6.822610E-02
7.000E-01	9.212547E-01	-2.168630E-01	8.146092E-01	-1.062629E-01
8.000E-01	8.982765E-01	-2.423798E-01	7.647600E-01	-1.551231E-01
9.000E-01	8.728456E-01	-2.658923E-01	7.117763E-01	-2.153728E-01
1.000E+00	8.451698E-01	-2.872555E-01	6.566892E-01	-2.872555E-01
1.100E+00	8.154699E-01	-3.063557E-01	6.005095E-01	-3.706904E-01
1.200E+00	7.839768E-01	-3.231109E-01	5.441994E-01	-4.652797E-01
1.300E+00	7.509276E-01	-3.374711E-01	4.886470E-01	-5.703261E-01
1.400E+00	7.165631E-01	-3.494173E-01	4.346464E-01	-6.848578E-01
1.500E+00	6.811243E-01	-3.589602E-01	3.828829E-01	-8.076604E-01
1.600E+00	6.448499E-01	-3.661387E-01	3.339232E-01	-9.373150E-01
1.700E+00	6.079733E-01	-3.710173E-01	2.882115E-01	-1.072240E+00
1.800E+00	5.707202E-01	-3.736839E-01	2.460697E-01	-1.210736E+00
1.900E+00	5.333066E-01	-3.742469E-01	2.077029E-01	-1.351031E+00
2.000E+00	4.959368E-01	-3.728321E-01	1.732071E-01	-1.491329E+00
2.100E+00	4.588015E-01	-3.695799E-01	1.425811E-01	-1.629847E+00
2.200E+00	4.220770E-01	-3.646419E-01	1.157389E-01	-1.764867E+00
2.300E+00	3.859239E-01	-3.581784E-01	9.252398E-02	-1.894764E+00
2.400E+00	3.504866E-01	-3.503553E-01	7.272415E-02	-2.018046E+00
2.500E+00	3.158926E-01	-3.413414E-01	5.608524E-02	-2.133383E+00
2.600E+00	2.822524E-01	-3.313061E-01	4.232472E-02	-2.239629E+00
2.700E+00	2.496598E-01	-3.204174E-01	3.114380E-02	-2.335843E+00
2.800E+00	2.181919E-01	-3.088400E-01	2.223804E-02	-2.421306E+00
2.900E+00	1.879094E-01	-2.967337E-01	1.530634E-02	-2.495531E+00
3.000E+00	1.588576E-01	-2.842527E-01	1.005820E-02	-2.558275E+00
3.100E+00	1.310664E-01	-2.715447E-01	6.219118E-03	-2.609544E+00
3.200E+00	1.045515E-01	-2.587507E-01	3.534484E-03	-2.649608E+00
3.300E+00	7.931464E-02	-2.460063E-01	1.771672E-03	-2.679009E+00
3.400E+00	5.534424E-02	-2.334426E-01	7.205782E-04	-2.698597E+00
3.500E+00	3.261573E-02	-2.211909E-01	1.921179E-04	-2.709588E+00
3.600E+00	1.109099E-02	-2.093927E-01	1.295467E-05	-2.713729E+00
3.620E+00	6.926088E-03	-2.071024E-01	3.992270E-06	-2.713953E+00
3.630E+00	4.860744E-03	-2.059675E-01	1.647240E-06	-2.714013E+00
3.640E+00	2.806714E-03	-2.048397E-01	4.173453E-07	-2.714044E+00
3.650E+00	7.639242E-04	-2.037196E-01	1.612968E-08	-2.714055E+00
3.652E+00	3.567080E-04	-2.034966E-01	2.403157E-09	-2.714055E+00
3.653E+00	1.532672E-04	-2.033852E-01	2.908190E-10	-2.714055E+00
3.65375374E+00	0.000000E+00	-2.033013E-01	0.000000E+00	-2.714055E+00

Tabell 1: Kulesymmetrisk løsning av Lane–Emden-ligningen for polytropisk indeks $\nu = 3/2$.