Løsninger, innleveringsøving for FY2450 Astrofysikk, våren 2010

Dette er ikke en mønsterløsning, det forventes ikke like utførlige redegjørelser til eksamen. Dette er ment som et eksempel på hvordan en kan *tenke*, mer enn hvordan en bør *skrive*. Men skriv helst tilstrekkelig utførlig til at det går fram hvordan du har tenkt. Et galt resonnement som er godt forklart, vil bli mildere bedømt til eksamen enn en slurvefeil uten forklaring til!

1) En stjerne og dens planeter beveger seg omkring det felles tyngdepunktet. Eksempelvis har Jorda en banehastighet på 30 km/s, og en masse som er 330 000 ganger mindre enn solmassen. Det vil si at Jorda får Sola til å bevege seg med en banehastighet som er

$$\frac{30 \text{ km/s}}{330\,000} = 9\;10^{-5} \text{ km/s} = 9 \text{ cm/s} .$$

En observatør utenfor solsystemet, i baneplanet til Jorda, ser altså en årlig variasjon på 18 cm/s i radialhastigheten til Sola (dvs. hastighetskomponenten langs sysnslinjen). Doppler-effekten vil da få linjene i solspektret til å flytte seg litt fram og tilbake. En slik effekt kan utnyttes til å oppdage at det går planeter i bane rundt en stjerne. Men, som vi skjønner, ville det være svært vanskelig å oppdage Jorda med denne teknikken.
Overflatetemperaturen på Sola er $T = 5\,800$ K, og den gjennomsnittlige kinetiske energien til et atom med masse m ved denne temperaturen er

$$E = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{3}{2}\,k_B T ,$$

der k_B er Boltzmanns konstant. Hastigheten v i denne formelen er da, hvis vi setter inn massen til et hydrogenatom,

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 1{,}38\;10^{-23}\;(\text{J/K}) \times 5\,800\;\text{K}}{1{,}67\;10^{-26}\;\text{kg}}} = 3{,}8 \text{ km/s} .$$

Doppler-effekten pga. hastigheten til hydrogenatomene gir derfor en linjebredde som er 40 000 ganger den forskyvningen av spektrallinjene som vi måtte måle for å oppdage Jorda med denne spektroskopiske teknikken. Da er det lett å forstå at de planetene som er oppdaget, stort sett har adskillig større masse enn Jorda og går i baner nærmere stjernene sine enn Jorda gjør. At det faktisk er mulig å oppdage planeter på denne måten, er ganske bemerkelsesverdig, og det trengs spektroskopiske teknikker som er så avanserte at en kan måle forskyvninger av spektrallinjer som er brøkdeler av linjebredden.

Vi antar at stjernen stråler som et svart legeme med temperatur T_s, da er energifluksen (energi pr. areal og tid) like over stjerneoverflaten

$$F = \sigma {T_s}^4 ,$$

der σ er Stefan–Boltzmanns konstant. I avstand d er fluksen

$$F' = F\,\frac{{R_s}^2}{d^2} = \sigma {T_s}^4\,\frac{{R_s}^2}{d^2} ,$$

fordi den totale utstrålte effekten (energi pr. tid) er

$$4\pi {R_s}^2\,F = 4\pi d^2\,F' .$$

Hvis planeten har radius R_p og albedo a_v for stjernelyset, så absorberer den en effekt (energi pr. tid) som er

$$W_{\mathrm{abs}} = (1-a_v)\,\pi R_p^{\,2}\,F' = (1-a_v)\,\pi R_p^{\,2}\,\sigma T_s^{\,4}\,\frac{R_s^{\,2}}{d^2}\ .$$

Hvis planeten har albedo a_{ir} for den infrarøde strålingen den selv stråler ut, så er den utstrålte effekten, i følge Kirchhoffs strålingslov som sier at emisjonskoeffisienten er lik absorpsjonskoeffisienten $1-a_{\mathrm{ir}}$,

$$W_{\mathrm{em}} = (1-a_{\mathrm{ir}})\,4\pi R_p^{\,2}\,\sigma T_p^{\,4}\ .$$

Ved temperaturlikevekt (stasjonær tilstand) må utstrålt effekt være nøyaktig lik innstrålt effekt, $W_{\mathrm{em}} = W_{\mathrm{abs}}$. Det gir formelen som skulle vises,

$$T_p = T_s\,\sqrt{\frac{R_s}{2d}}\,\sqrt[4]{\frac{1-a_v}{1-a_{\mathrm{ir}}}}\ .$$

For Jorda og Sola er

$$\sqrt{\frac{R_s}{2d}} = \sqrt{\frac{6,96\times 10^5\ \mathrm{km}}{2\times 149,6\times 10^6\ \mathrm{km}}} = \sqrt{\frac{1}{429,9}} = \sqrt{2,326\ 10^{-3}} = \frac{1}{20,73} = 0,04823\ .$$

Disse tallene er dem vi trenger når stjerneradien er oppgitt i solradier og store halvakse i planetbanen er oppgitt i astronomiske enheter.

For en elliptisk bane med store halvakse a og eksentrisitet e er minste avstand $d_1 = (1-e)a$ og største avstand $d_2 = (1+e)a$. For sikkerhets skyld regner vi ut temperaturen for både minste og største avstand, så ser vi om variasjonen i avstand har noen betydning.

Stjerne	Planet	Store halvakse AE	Eksentrisitet	Laveste temperatur K	Høyeste temperatur K
Fomalhaut	b	115	0,11	49	55
HD 160691	c	0,09094	0,17	942	1119
HD 160691	d	0,921	0,067	310	332
HD 160691	b	1,50	0,128	236	269
HD 160691	e	5,235	0,10	128	142
61 Vir	b	0,050201	0,12	1091	1231
61 Vir	c	0,2175	0,14	519	598
61 Vir	d	0,476	0,35	323	465
Gliese 581	e	0,03	0	597	597
Gliese 581	b	0,041	0	511	511
Gliese 581	c	0,07	0,17	362	429
Gliese 581	d	0,22	0,38	188	280
Gliese 876	d	0,021	0,14	627	721
Gliese 876	c	0,132	0,266	237	311
Gliese 876	b	0,211	0,029	208	214

De fleste som reiser på ferie, velger seg trolig et sted med temperaturer på 10 ± 30 grader Celsius, altså mellom 253 K og 313 K. Den av planetene som kommer nærmest til å oppfylle kravet, er nok Gliese 876c. Men ta med varme klær! Siden den har nesten like stor masse som Jupiter, er den trolig en gassplanet, som Jupiter, og i så fall passer det dårlig å reise dit. Og hvis den, mot formodning, skulle ha fast overflate som du kan gå på, så vil du føle seg tung der!

Luminositeten til en stjerne er

$$L_s = 4\pi R_s^2 \, \sigma T_s^4 \, .$$

Vi sammenligner med luminositeten til Sola, $L_\odot$, og har at

$$\frac{L_s}{L_\odot} = \left(\frac{R_s}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T_s}{T_\odot}\right)^4 .$$

For den absolutte størrelsesklassen m^{abs} (vanligvis betegnet med M, men her har vi brukt M om massen) gjelder at

$$m_\odot^{\mathrm{abs}} - m_s^{\mathrm{abs}} = 2,5 \, \log_{10}\left(\frac{L_s}{L_\odot}\right),$$

med en faktor på $2,5$ som gir at $m_\odot^{\mathrm{abs}} - m_s^{\mathrm{abs}} = 5$ for $L_s/L_\odot = 100$. Siden $m_\odot^{\mathrm{abs}} = 4,8$ er

$$m_s^{\mathrm{abs}} = 4,8 - 2,5 \, \log_{10}\left(\frac{L_s}{L_\odot}\right) = 4,8 - 5 \, \log_{10}\left(\frac{R_s}{R_\odot}\left(\frac{T_s}{T_\odot}\right)^2\right).$$

Hvis avstanden til stjernen er d_s, så er den tilsynelatende størrelsesklassen gitt ved formelen

$$m = m_s^{\mathrm{abs}} + 5 \, \log_{10}\left(\frac{d_s}{10 \text{ parsec}}\right).$$

Det gir følgende tabell.

Stjerne	Avstand	Spektralklasse,		Radius	Størrelsesklasse	
	parsec	overflatetemperatur		$R_\odot$	m^{abs}	m
Fomalhaut	7,7	A3 V	8540 K	1,82	1,79	1,22
HD 160691	15,3	G3 IV-V	5700 K	1,25	4,36	5,29
61 Vir	8,52	G5 V	5531 K	0,94	5,11	4,76
Gliese 581	6,26	M3 V	3480 K	0,38	9,09	8,07
Gliese 876	4,7	M4 V	3350 K	0,36	9,37	7,73

Stjerner ned til størrelsesklasse 6 kan ses uten teleskop. Det blir da de tre første, spesielt er Fomalhaut en av de klareste stjernene på himmelen, men ganske langt sør og lite synlig fra våre breddegrader.

De to siste stjernene er ikke synlige uten teleskop, selv om de er blant våre nærmeste naboer, begge innenfor 20 lysår.

Til sammenligning: stjernen Deneb, i halen på stjernebildet Svanen, er 1400 lysår fra oss, men med sin størrelsesklasse $1,25$ lyser den likevel like klart på himmelen som Fomalhaut.

2) Vekten av den loddrette luftsøylen over 1 m^2 av jordoverflaten er 10^5 N. Vekten er mg, der m er massen og $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s}^2 \approx 10\ \mathrm{m/s}^2$ er tyngdens akselerasjon. Massen av denne luftsøylen er altså 10^4 kg. Jordradien er $R = 6378$ km, og det totale arealet av jordoverflaten er

$$4\pi R^2 = 5{,}112\ 10^8\ \mathrm{km}^2 = 5{,}112\ 10^{14}\ \mathrm{m}^2\ .$$

Massen av jordatmosfæren blir da $5{,}11\ 10^{18}$ kg.
Sammenlignet med hele jordmassen på $5{,}974\ 10^{24}$ kg blir det en andel på $8{,}56\ 10^{-7} \approx 10^{-6}$.

3) For en ideal gass ved konstant temperatur T er trykket P proporsjonalt med tettheten ρ,

$$P = \frac{\rho k_B T}{\overline{m}}\ .$$

Ligningen for hydrostatisk likevekt gir da at

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{\overline{m} P g}{k_B T} = -\alpha P\ ,$$

der α er konstant når temperaturen er konstant,

$$\alpha = \frac{\overline{m}\, g}{k_B T}\ .$$

Dette er en separabel differensialligning, vi kan skrive den som

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\alpha\, \mathrm{d}z\ ,$$

da kan den integreres direkte, og løsningen er

$$\ln P - \ln P_0 = -\alpha(z - z_0)\ ,$$

der P_0 og z_0 er integrasjonskonstanter. For en førsteordens ligning som denne skal vi som kjent ha en integrasjonskonstant, ikke to, og det er nettopp det vi har, men den ene konstanten velger vi å skrive som $\ln P_0 + \alpha z_0$. Eksponensiering gir at

$$P = P_0\, \mathrm{e}^{-\alpha(z - z_0)}\ .$$

Luft består av rundt regnet 80 % nitrogen (N_2, massetall $2 \times 14 = 28$) og 20 % oksygen (O_2, massetall $2 \times 16 = 32$). Gjennomsnittlig masse for et luftmolekyl er følgelig (omtrentlig regnet, der $\mathrm{u} = 1{,}66\ 10^{-27}$ kg er atommasseenheten, praktisk talt identisk med protonmassen m_p)

$$\overline{m} = (0{,}8 \times 28 + 0{,}2 \times 32)\,\mathrm{u} = 28{,}8\ \mathrm{u} = 28{,}8 \times 1{,}66\ 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 4{,}8\ 10^{-26}\ \mathrm{kg}\ .$$

Den numeriske verdien for konstanten α, hvis vi setter temperaturen (litt tilfeldig) lik 283 K, altså 10 grader Celsius, blir

$$\alpha = \frac{\overline{m}\, g}{k_B T} = \frac{4{,}8\ 10^{-26}\ \mathrm{kg} \times 9{,}8\ \mathrm{m/s}^2}{1{,}38\ 10^{-23}\ (\mathrm{J/K}) \times 283\ \mathrm{K}} = 1{,}20\ 10^{-4}/\mathrm{m}\ .$$

Hvis vi velger z_0 som havnivået, så er altså $P_0 = 1$ atmosfære. For Galdhøpiggen har vi at $z - z_0 = 2469$ m, og trykket der er

$$P = P_0 \, \mathrm{e}^{-(1{,}20\ 10^{-4}/\mathrm{m})\ 2469\ \mathrm{m}} = P_0 \, \mathrm{e}^{-0{,}2963} = 0{,}744 \, P_0 \, .$$

Tilsvarende for de to andre fjelltoppene,

$$P = P_0 \, \mathrm{e}^{-(1{,}20\ 10^{-4}/\mathrm{m})\ 4807\ \mathrm{m}} = P_0 \, \mathrm{e}^{-0{,}5768} = 0{,}562 \, P_0 \, ,$$

og

$$P = P_0 \, \mathrm{e}^{-(1{,}20\ 10^{-4}/\mathrm{m})\ 8848\ \mathrm{m}} = P_0 \, \mathrm{e}^{-1{,}0618} = 0{,}346 \, P_0 \, .$$

4) For atmosfæren til Mars bruker vi den samme formelen som for jordatmosfæren,

$$P = P_0 \, \mathrm{e}^{-\alpha(z-z_0)} \, .$$

Men konstanten

$$\alpha = \frac{\overline{m}\, g}{k_B T}$$

har nå en litt annen numerisk verdi. Atmosfæren til Mars inneholder 95 % CO_2, så vi regner som om den besto av bare CO_2. Molekylvekten av CO_2 er $12 + 2 \times 16 = 44$, slik at gjennomsnittsmassen av et molekyl er

$$\overline{m} = 44\ \mathrm{u} = 44 \times 1{,}66\ 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 7{,}3\ 10^{-26}\ \mathrm{kg} \, .$$

Tyngdens akselerasjon er $g = 3{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ (sammenlignet med Jorda er massen 0,107 og radien 0,533, slik at tyngdens akselerasjon på Mars sammenlignet med på Jorda blir $0{,}107/0{,}533^2 = 0{,}38$). Temperaturen varierer mye mellom dag og natt, bruker vi middeltemperaturen $T = 220$ K, får vi at

$$\alpha = \frac{\overline{m}\, g}{k_B T} = \frac{7{,}3\ 10^{-26}\ \mathrm{kg} \times 3{,}8\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}38\ 10^{-23}\ (\mathrm{J/K}) \times 220\ \mathrm{K}} = 9{,}1\ 10^{-5}/\mathrm{m} \, .$$

Med en høydeforskjell på $z - z_0 = 31$ km finner vi da at

$$P = P_0 \, \mathrm{e}^{-(9{,}1\ 10^{-5}/\mathrm{m})\ 31\,000\ \mathrm{m}} = P_0 \, \mathrm{e}^{-2{,}82} = 0{,}060 \, P_0 \, .$$

Trykket på toppen av Olympus Mons er 6 % av trykket i det laveste punktet på Mars.

5) Selv om det blåser kraftig, vil trykket utlignes praktisk talt fullstendig, slik at betingelsen for hydrostatisk likevekt vil gjelde som en god tilnærming,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g \, .$$

Luft som beveger seg fra Dovre ned mot Trondheim vil trykkes sammen, fordi lufttrykket øker nedover. Hvis sammentrykkingen skjer adiabatisk, er altså $P = K\rho^\gamma$, der K og γ er konstanter. Det vil si at

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \gamma K \rho^{\gamma-1} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} \, .$$

Disse to ligningene tilsammen gir at

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} = -\frac{\rho g}{\gamma K \rho^{\gamma-1}} = -\frac{g}{\gamma K \rho^{\gamma-2}} \, .$$

Som vi omskriver til

$$\gamma K\rho^{\gamma-2}\,\mathrm{d}\rho = -g\,\mathrm{d}z\ .$$

Integrasjon gir så at

$$\frac{\gamma K\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} = -g\,(z-z_0)\ ,$$

der z_0 er en integrasjonskonstant. Vi setter inn først $K\rho^\gamma = P$, det gir at

$$\frac{\gamma P}{(\gamma-1)\rho} = -g\,(z-z_0)\ .$$

Deretter setter vi inn $P/\rho = k_B T/\overline{m}$, det gir at

$$\frac{\gamma k_B T}{(\gamma-1)\overline{m}} = -g\,(z-z_0)\ ,$$

eller ekvivalent,

$$T = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{\overline{m}g\,(z-z_0)}{k_B} = -\frac{2}{7}\,\frac{4{,}8\ 10^{-26}\ \mathrm{kg}\ 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}\,(z-z_0)}{1{,}38\ 10^{-23}\ \mathrm{J/K}} = -(9{,}7\ 10^{-3}\ \mathrm{K/m})\,(z-z_0)\ .$$

Hvis temperaturen ved $z = z_1 = 1100$ m er T_1, og temperaturen ved $z = z_2 = 100$ m er T_2, så er temperaturdifferensen

$$T_2 - T_1 = -(9{,}7\ 10^{-3}\ \mathrm{K/m})\,(z_2 - z_1) = -(9{,}7\ 10^{-3}\ \mathrm{K/m})\,(-1000\ \mathrm{m}) = 9{,}7\ \mathrm{K}\ .$$

Hvis alle opp- og nedgående luftstrømmer i atmosfæren var adiabatiske, så skulle, i følge vårt lille regnestykke, temperaturen avta med en grad for hver 100 meter over havet. Men det er flere effekter som gjør at den virkelige temperaturgradienten blir mindre (dvs. mindre i absoluttverdi) enn en grad for hver 100 meter.
Noen ganger ligger kanskje lufta stille, slik at temperaturen utjevnes. En stille vinterdag kan vi til og med få temperaturinversjon, det vil si at det ligger et varmt luftlag over et kaldt luftlag ved bakken.
Et annet viktig poeng er at luft inneholder vanndamp, og det finnes et metningspunkt for vanndampinnholdet, som avhenger av trykk og temperatur. Når luft mettet på vanndamp stiger opp og avkjøles, kondenseres noe av vanndampen, og i den prosessen frigjøres varme slik at lufta avkjøles mindre enn den ellers ville gjøre.
Vårt regnestykke forteller forresten også at den kritiske temperaturgradienten for konveksjon i atmosfæren (i tørr luft) er ca. en grad for hver 100 meter. Det vil ikke foregå konveksjon når temperaturgradienten er mindre enn det. Men det trengs ikke særlig mye oppvarming ved bakken en sommerdag med sol, før temperaturgradienten blir større enn den kritiske verdien, slik at varm luft kan stige fra bakken og flere kilometer opp, og det oppstår cumulus-skyer.

6a) Gravitasjonspotensialet ϕ er en funksjon av fire variable x, y, z, t, men vi antar her at det avhenger av x, y, z bare gjennom radien $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vi skriver da $\phi = \phi(x, y, z, t) = \phi(r, t)$. La oss presisere hva vi mener med denne notasjonen. I et punkt (x, y, z) i rommet ved tiden t har gravitasjonspotensialet en bestemt verdi ϕ, og denne verdien avhenger bare av r. For å unngå forvirring når vi deriverer, burde vi kanskje heller skrive $\phi(x, y, z, t) = f(r, t)$. Da ser vi altså på ϕ som en funksjon av fire variable x, y, z, t, mens vi ser på f som en funksjon av to variable r, t. Matematisk sett er ϕ og f to forskjellige funksjoner, de har til og med

forskjellig antall argumenter, men funksjonsverdien av ϕ i (x, y, z, t) er lik funksjonsverdien av f i (r, t).
Derivasjon gir at

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, 2x = \frac{x}{r}\,, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\,.$$

Og tilsvarende for derivasjon med hensyn på y og z. Da blir

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{x}{r}$$

Når vi partiellderiverer, gjelder det å holde rede på hvilke variable som varieres og hvilke som holdes konstante. Vi kan partiellderivere $\phi(x, y, z, t)$ eller $f(r, t) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, t)$ med hensyn på x, da er det x som varieres, mens y, z, t holdes konstante. Vi kan ikke partiellderivere $\phi(x, y, z, t)$ med hensyn på r, men vi kan partiellderivere $f(r, t)$ med hensyn på r, da varierer vi r og holder t konstant.
Videre blir

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right).\end{aligned}$$

Og tilsvarende for derivasjon med hensyn på y og z. Dermed får vi at

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\,.$$

Til slutt forenkler vi notasjonen ved at vi skriver den samme formelen slik:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}\,.$$

6b) Vi skal løse ligningen

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right) = C$$

der C er konstant, enten $C = 4\pi G\rho_0$, for $0 < r < R$, eller $C = 0$, for $r > R$. Integrasjon en gang gir at

$$r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{Cr^3}{3} + A\,,$$

der A er en integrasjonskonstant, som kan ha forskjellig verdi i de to intervallene $0 < r < R$ og $r > R$. Integrasjon en gang til gir at

$$\phi = \frac{Cr^2}{6} - \frac{A}{r} + B\,,$$

der B er en ny integrasjonskonstant, som også kan ha forskjellig verdi i de to intervallene $0 < r < R$ og $r > R$. For $0 < r < R$ har vi altså

$$\phi = \frac{2\pi G\rho_0 r^2}{3} - \frac{A_1}{r} + B_1\,,$$

og for $r > R$ har vi

$$\phi = -\frac{A_2}{r} + B_2 \ ,$$

med tilsammen fire integrasjonskonstanter A_1, B_1, A_2, B_2. Vi krever at $\phi \to 0$ når $r \to \infty$, det gir at $B_2 = 0$. Vi krever også at ϕ ikke skal være singulær (ved at $\phi \to \pm\infty$) når $r \to 0$, det gir at $A_1 = 0$.

Et interessant spørsmål er hva som skjer i punktet $r = R$, der høyresiden i differensialligningen vår, $4\pi G\rho(r)$, er diskontinuerlig. For å forstå hva som skjer, kan vi tenke oss at vi glatter ut diskontinuiteten, at vi altså lar tettheten $\rho(r)$ gå kontinuerlig fra verdien ρ_0 til verdien 0 over et lite intervall $R - \epsilon < r < R + \epsilon$, der ϵ er liten og positiv. Så integrerer vi ligningen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right) = 4\pi G\rho(r)\,r^2$$

fra $r = R - \epsilon$ til $r = R + \epsilon$, det gir at

$$r^2\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\bigg|_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} = \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} \mathrm{d}r'\ 4\pi G\rho(r')\,(r')^2 \ .$$

Diskontinuiteten av $\rho(r)$ oppstår i grensen $\epsilon \to 0$. I denne grensen vil integralet på høyre side i den siste ligningen gå mot null, og det betyr at den deriverte $\phi' = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}r$ er kontinuerlig i $r = R$. Siden funksjonen ϕ har en kontinuerlig derivert ϕ', er den selv kontinuerlig. Konklusjon: vi oppfyller differensialligningen i punktet $r = R$ ved at vi krever at både $\phi(r)$ og $\phi'(r)$ skal være kontinuerlige der.

Kontinuitetskravet for ϕ i $r = R$ betyr at

$$\frac{2\pi G\rho_0 R^2}{3} + B_1 = -\frac{A_2}{R} \ ,$$

Kontinuitetskravet for ϕ' i $r = R$ betyr at

$$\frac{4\pi G\rho_0 R}{3} = \frac{A_2}{R^2} \ .$$

Alt i alt får vi den entydige løsningen

$$\phi = \frac{2\pi G\rho_0(r^2 - 3R^2)}{3} \qquad \text{for} \quad 0 < r < R \ ,$$

$$\phi = -\frac{4\pi G\rho_0 R^3}{3r} \qquad \text{for} \quad r > R \ .$$

6c) Vi har at $g = |\vec{g}| = |\nabla\phi| = |\phi'|$. Tyngdens akselerasjon inne i planeten, for $0 < r < R$, er

$$g = \frac{4\pi G\rho_0 r}{3} = \frac{GM_r(r)}{r^2} \ .$$

Og tyngdens akselerasjon utenfor planeten, for $r > R$, er

$$g = \frac{4\pi G\rho_0 R^3}{3r^2} = \frac{GM}{r^2} \ .$$

6d) Hvis

$$\phi = \phi_0 + A \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) ,$$

så er

$$\rho = \rho_0 \, \mathrm{e}^{\frac{\phi_0 - \phi}{K}} = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{A}{K}} .$$

Dessuten er

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{r} , \qquad \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{A}{r^2} ,$$

og

$$\nabla^2\phi = \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{r^2} .$$

Poissons ligning $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ ser dermed slik ut:

$$\frac{A}{r^2} = 4\pi G\rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{A}{K}} .$$

For at begge sidene av ligningen skal variere med r på samme måte, er det nødvendig at $A = 2K$. Poissons ligning reduseres da til ligningen

$$2K = 4\pi G\rho_0 r_0^{\,2} .$$

Tettheten blir

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = \frac{K}{2\pi G r^2} .$$

Denne løsningen er ufysisk på den måten at tettheten er singulær i origo, $\rho \to \infty$ når $r \to 0$. På den andre siden er ikke tettheten mer singulær enn at massen innenfor en gitt radius r er endelig, og går mot null når $r \to 0$,

$$M_r(r) = \int_0^r \mathrm{d}r' \; 4\pi (r')^2 \, \rho(r') = \int_0^r \mathrm{d}r' \; \frac{2K}{G} = \frac{2Kr}{G} .$$

Løsningen er kanskje ikke helt urealistisk likevel, som en beskrivelse av en gasståke med konstant temperatur og med en tetthet som øker innover mot sentrum.
Det finnes naturligvis andre kulesymmetriske løsninger av ligningen $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho_0 \mathrm{e}^{\frac{\phi_0 - \phi}{K}}$. For eksempel kan vi rekkeutvikle omkring $r = 0$ og finne løsninger der tettheten i sentrum er endelig.

6e) Massen er

$$M = \frac{R^2\, g(R)}{G} = -\frac{(\xi_1 r_0)^2(\nu+1)P_c}{G\rho_c r_0}\,\Theta'(\xi_1) = \frac{r_0(\nu+1)P_c}{G\rho_c}\,(-{\xi_1}^2\Theta'(\xi_1))\ .$$

I følge definisjonen av r_0 er da

$$M = 4\pi\rho_c {r_0}^3\,(-{\xi_1}^2\Theta'(\xi_1))\ .$$

6f) De to ligningene (34) og (36) i oppgaveteksten gir at

$$M = a_1\,\frac{4\pi}{3}\,\rho_c R^3\ ,$$

der

$$a_1 = \frac{(-3{\xi_1}^2\Theta'(\xi_1))}{{\xi_1}^3} = \frac{3\times 2,714}{3,654^3} = 0{,}166925 = \frac{1}{5{,}99070}\ .$$

Sola har en midlere tetthet $\overline{\rho}$ som er 1,4 ganger tettheten av vann,

$$\overline{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 1390\ \mathrm{kg/m}^3\ .$$

I følge Lane–Emden-ligningen, med polytropindeks $\nu = 3/2$, skulle sentraltettheten være

$$\rho_c = \frac{1}{a_1}\,\frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{\overline{\rho}}{a_1} = 8400\ \mathrm{kg/m}^3\ ,$$

altså $1/a_1 = 6$ (mer nøyaktig 5,99) ganger den midlere tettheten. Det må nærmest kalles skivebom, siden fasitsvaret for sentraltettheten, 152 700 kg/m^3, er 19 ganger større, og mer enn hundre ganger den midlere tettheten.
Sentraltrykket er, i følge Lane–Emden-ligningen,

$$P_c = \frac{8\pi G R^2}{5{\xi_1}^2}\,{\rho_c}^2 = \frac{8\pi G R^2}{5{\xi_1}^2}\,\frac{1}{{a_1}^2}\,\frac{9M^2}{16\pi^2 R^6} = a_2\,\frac{GM^2}{R^4} = 8{,}56\ 10^{14}\mathrm{N/m}^2\ ,$$

der

$$a_2 = \frac{9}{10\pi{\xi_1}^2{a_1}^2} = 0{,}77014\ .$$

Det sentraltrykket vi nettopp har regnet ut, er 26 ganger for lite, altså en ny skivebom.
Sentraltrykket har forøvrig en viss sammenheng med den totale gravitasjonsenergien. La oss sammenligne med gravitasjonsenergien for en kule med konstant tetthet, som er

$$W = \frac{3}{5}\,\frac{GM^2}{R}\ .$$

Hvis vi multipliserer sentraltrykket vi har regnet ut, med volumet $\mathcal{V} = 4\pi R^3/3$, får vi at

$$P_c\mathcal{V} = \frac{6}{5{\xi_1}^2{a_1}^2}\,\frac{GM^2}{R} = a_3 W\ ,$$

der

$$a_3 = \frac{2}{{\xi_1}^2{a_1}^2} = 5{,}3766\ .$$

6g) Når vi bruker tilstandsligningen for en ideal gass, finner vi sentraltemperaturen

$$T_c = \frac{P_c}{\rho_c} \frac{\overline{m}}{k_B} \ .$$

Vi må bare finne den riktige verdien å sette inn for den midlere partikkelmassen $\overline{m}$.
La m_e, m_p og $m_\alpha = 4m_p$ være massene av henholdsvis et elektron, et proton og en α-partikkel (en α-partikkel er det samme som en heliumkjerne). Hvis vi har gitt et gassvolum med N partikler og total masse m, så er den midlere partikkelmassen definert som

$$\overline{m} = \frac{m}{N} \ .$$

Siden 34 % av massen er hydrogen, så er antallet protoner i gassvolumet gitt som

$$N_p = \frac{0{,}34\ m}{m_p} \ .$$

Husk at elektronmassen er neglisjerbar sammenlignet med massen til en atomkjerne. 64 % av massen er helium, og antallet α-partikler er

$$N_\alpha = \frac{0{,}64\ m}{m_\alpha} = \frac{0{,}16\ m}{m_p} \ .$$

Da har vi gjort rede for 98 % av massen. De siste to prosentene er atomkjerner av diverse grunnstoffer, trolig mest karbon. Hvis vi sier karbonkjerner, med masse $m_C = 12m_p$, så er antallet av dem nokså neglisjerbart,

$$N_C = \frac{0{,}02\ m}{12m_p} \ .$$

Antallet elektroner er nå

$$N_e = N_p + 2N_\alpha + 6N_C = \frac{(0{,}34 + 0{,}32 + 0{,}01)m}{m_p} = \frac{0{,}67m}{m_p} \ ,$$

og det totale antallet partikler er

$$N = N_p + N_\alpha + N_C + N_e = \frac{(0{,}34 + 0{,}16 + 0{,}0017 + 0{,}67)m}{m_p} = \frac{1{,}17m}{m_p} \ .$$

Altså er

$$\overline{m} = \frac{m}{N} = \frac{m_p}{1{,}17} = \frac{1{,}67\ 10^{-27}\ \text{kg}}{1{,}17} = 1{,}43\ 10^{-27}\ \text{kg} \ .$$

Sentraltemperaturen blir da

$$T_c = \frac{P_c}{\rho_c} \frac{\overline{m}}{k_B} = \frac{2{,}342\ 10^{16}\ \text{N/m}^2 \times 1{,}43\ 10^{-27}\ \text{kg}}{1{,}527\ 10^5\ \text{kg/m}^3 \times 1{,}38\ 10^{-23}\ \text{J/K}} = 1{,}59\ 10^7\ \text{K} \ .$$

Fasitsvaret, fra den nevnte solmodellen, er 1,57 10^7 K.