

Numeriske beregninger i elektromagnetisme

Kristoffer Stige og Erlend Espeland
TFY4240 Elektromagnetisk teori
Institutt for fysikk, NTNU

2. oktober 2009

Innledning

Denne prosjektoppgaven er et svar på midtsemesterprosjektet i TFY4240 Elektromagnetisk teori. Oppgaven har bestått i å gjennomføre noen enkle numeriske beregninger av elektrostatiske problemer for å lære mer om bruk av numerikk og datamaskiner i løsning av fysikkproblemer. Her presenteres teorien bak utregningene som er brukt, resultatene av beregningene, og en diskusjon av beregningene.

Teori

Det teoretiske utgangspunktet for løsning av oppgavene er Gauss' lov for det elektriske forskyvningsfeltet

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_{in} \quad (1)$$

I oppgaven er det gitt to ladningsfordelinger for ladning innenfor en homogen og isotrop kule av et lineært dielektrisk materiale. Den første ladningsfordelingen er

$$\rho(r) = \begin{cases} 4\pi r^2 \rho_0, & r \leq R, \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (2)$$

mens den andre, og mer kompliserte ladningsfordelingen er gitt ved

$$\rho(r) = \begin{cases} Cr^2 J_0(\alpha r/R), & r \leq R, \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (3)$$

der $J_0(x)$ er 0te ordens Besselfunksjon, og $\alpha = 5.5200781102863$ er det andre nullpunktet til $J_0(x)$.

Dette er ladningsfordelinger der $\rho(r)$ er ladningen i et kuleskall i avstand r fra sentrum av kula. Det er viktig å merke seg at begge fordelingene er kulesymmetriske, da dette er forenkler beregningene. Når ladningsfordelingen er kulesymmetrisk, vil \vec{D} overalt stå normalt på et kuleskall med samme sentrum som ladningsfordelinga. Dersom dette utnyttes ved at disse kuleskallene velges som Gauss-flater forenkles (1) for de to oppgitte tilfellene til

$$4\pi r^2 D = q_{in}(r) = \int_0^r \rho(r') dr' \quad (4)$$

slik at det elektriske forskyvningsfeltet er gitt ved

$$D(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \rho(r') dr' \quad (5)$$

Definisjonen av \vec{D} er

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (6)$$

der \vec{E} er det elektriske feltet og \vec{P} er polariseringen. Fordi det dielektriske mediumet kulene er lagd av er lineært, isotropt og homogent reduseres (6) til

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad (7)$$

der ϵ_r er mediets relative elektriske permittivitet. Når denne proporsjonaliteten gjelder finnes \vec{E} direkte fra \vec{D} .

Sammenhengen mellom det elektriske feltet, E , og potensialet, V er gitt ved

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} \quad (8)$$

der den siste likheten kommer av at ladningsfordelingene er kulesymmetriske. Hvis potensialets referansepunkt velges uendelig langt borte kan det da uttrykkes som

$$V(r) = -\int_{\infty}^r E dr' \quad (9)$$

Grensebetingelsene i overgangen mellom et materiale og vakuum utledes fra Gauss' lov¹. På grunn av kulesymmetrien er det bare nødvendig å se på den radielle retningen, da alle felt er retta radielt utover fra sentrum.

Den aktuelle grensebetingelsen for det elektriske feltet blir da

$$(\vec{E}_{ut} - \vec{E}_{inn}) \cdot \hat{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (10)$$

der σ er den totale overflateladningen.

Det elektriske potensialet er kontinuerlig i grensen,

$$V_{ut} = V_{inn} \quad (11)$$

mens det fra (8) og (10) følger at diskontinuiteten i den normalderiverte av potensialet vil være

$$\frac{\partial V_{ut}}{\partial r} - \frac{\partial V_{inn}}{\partial r} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (12)$$

Istedet for grensebetingelsen for det elektriske feltet kan det noen ganger være nyttig å bruke grensebetingelsen for det elektriske forskyvningsfeltet

$$\vec{D}_{ut}^{\perp} - \vec{D}_{inn}^{\perp} = \sigma_{fri} \quad (13)$$

der σ_{fri} er den frie overflateladningen.

Som resultatdelen viser vil ladningsfordelingene gi $\sigma_{fri} = 0$. At det må være sånn kan sees ved å regne ut den totale ladningen i et lite område rundt grenseflata.

$$\int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} \rho(r) dr = 4\pi\rho_0 \cdot \frac{1}{3} [(R+\epsilon)^3 - (R-\epsilon)^3] = \rho(R) \cdot 2\epsilon \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} 0 \quad (14)$$

σ i uttrykkene (10) og (12) vil da være lik den bundne ladningen σ_{bunden} . Den kan uttrykkes ved polariseringen \vec{P}

$$\sigma_{bunden} = \vec{P} \cdot \hat{r} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E \quad (15)$$

der det er brukt at $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$ og $\vec{P} \parallel \hat{r}$.

¹Griffiths 2008: 88-90

Resultater

Oppgave 1

Denne ladningsfordelinga er såpass enkel at den kan løses analytisk, men siden meninga med prosjektet er å lære og løse oppgaver numerisk er det brukt samme numeriske metode som i oppgave 2. Men for å kunne sammenlikne de numeriske resultatene med de analytiske vil uttrykkene for \vec{D} , \vec{E} og V bli gitt her. Disse uttrykkene fås direkte fra henholdsvis (5), (7) og (9).

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3} r, & r \leq R, \\ \frac{\rho_0}{3} \frac{R^3}{r^2}, & r > R \end{cases} \quad (16)$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_r\epsilon_0} r, & r \leq R, \\ \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}, & r > R \end{cases} \quad (17)$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (R^2 - \frac{r^2}{\epsilon_r} + \frac{R^2}{\epsilon_r}), & r \leq R, \\ \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r}, & r > R \end{cases} \quad (18)$$

Oppgaven ber om at det skal vises at ladningsfordelinga er uniform. Må da vise at $\frac{q_{in}}{V}$ er konstant for alle $r \leq R$:

$$\frac{q_{in}}{V} = \frac{\int_0^r 4\pi r'^2 \rho_0 dr'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \rho_0 = \text{konstant} \quad (19)$$

Går nå videre til å den numeriske løsningen av oppgaven. Numeriske verdier brukt i oppgave 1 finnes i tabell 1.

Tabell 1: Konstanter og valgte verdier i oppgave 1

Kulas radius:	$R = 1,0 \text{ m}$
Total ladning på kula:	$q = 8,0 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$
Permittiviteten i vakuum:	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$
Relativ permittivitet:	$\epsilon_r = 2$

Verdien for ρ_0 finner vi fra q ved

$$q = \int_0^R \rho(r') dr' = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{3q}{4\pi R^3} \quad (20)$$

Oppgaven er løst i Python som forklart i diskusjonsdelen. Grafene fra oppgave 1 er figur 1, 2 og 3. I tabell 2 er det gitt noen numerisk beregnede verdier som brukes under diskusjon av diskontinuiteten.

Tabell 2: Numeriske verdier fra oppgave 1

Ladningstetthet:	$\rho_0 = 1,9099 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$
Indusert overflateladning:	$\sigma_{bunden} = 2,81831573227 \cdot 10^{-18} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$
Diskontinuitet i E:	$(\vec{E}_{ut} - \vec{E}_{inn}) \cdot \hat{n} = 3,18309981677 \cdot 10^{-7} \frac{\text{V}}{\text{m}}$

Oppgave 2

Ladningsfordelinga i oppgave 2 er så komplisert at det blir for vanskelig å finne feltene og potensialet analytisk. Oppgaven løses derfor kun numerisk. Numeriske verdier brukt i oppgave 2 finnes i tabell 3.

Numeriske resultater fra oppgave 2 er gitt i tabell 4, mens grafene er gitt i figur 4, 5, 6 og 7.

Tabell 3: Verdier oppgave 2

Kulas radius:	$R = 1,0 \text{ m}$
Normeringsfaktor:	$C = -1,0$
Permittivteten i vakuum:	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$
Relativ permittivitet:	$\epsilon_r = 2$

Tabell 4: Numeriske verdier fra oppgave 2

Total fri ladning:	$q = 0,0656177055132C$
Indusert overflateladning:	$\sigma_{bunden} = 0.00261084554669 \frac{C}{m^2}$
Diskontinuitet i E:	$(\vec{E}_{ut} - \vec{E}_{inn}) \cdot \hat{n} = 294877341.335 \frac{V}{m}$

Diskusjon

Algoritme og valg av verdier:

Samme fremgangsmåte er brukt i begge oppgavene. Først er Gauss lov for den elektriske forskyvninga (1) brukt til å beregne det elektriske forskyvningsfeltet. Videre er (7) brukt til å finne det elektriske feltet. Så er dette integrert opp som i (9) for å finne potensialet. Alt er gjort numerisk ved bruk av Python med tilleggene Numpy² og Scipy³.

I oppgave 1 er den totale ladninga på kula valgt til å være $q = 8,0 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$. Det er ei veldig stor ladning, noe som viser seg på grafene for E-feltet og potensialet. Den store verdien er valgt fordi lave verdier av ρ_0 krever flere punkt, og dermed flere beregninger for å gi ei kurve som ikke er prega av numeriske unøyaktigheter. I utgangspunktet skulle dette være uproblematisk, men algoritma som er brukt for å beregne potensialet skriver ut ei advarselmelding for hvert punkt den bergener i. Algoritma gir ellers riktig beregning så det ble valgt å ikke bruke tid på å finne problemet. Men i prinsippet har stor verdi av ρ_0 ingenting å si for løsninga. Den vil skalere slik at felta blir store, men forma på grafene blir essensielt den samme.

I oppgave 2 ble det valgt $C = -1.0$. Ved å velge den negativ blei den totale ladninga på kula positiv. Fysikken i problemet hadde blitt akkurat den samme om C ble valgt positiv. Da hadde den totale ladninga blitt negativ, og alle grafer ville ha blitt speilvendt om r-aksen. Også i denne oppgava blir den totale ladninga veldig stor. Men av samme grunn som i oppgave 1 ble dette valget gjort av hensyn til beregningstida.

Oppgave 1

D-feltet

Figur 1 viser at \vec{D} er kontinuerlig. Innafor kula er det lineært, mens det avtar som $\frac{1}{r^2}$ utafor kula. Dette stemmer med det analytiske resultatet i (16) og er derfor som forventa. Grensebetingelsen for dette feltet er gitt ved (13). Siden feltet er kontinuerlig gir likninga at $\sigma_{fri} = 0$, som stemmer med det som ble vist i teoridelen.

E-feltet

Figur 2 viser at E-feltet har en diskontinuitet i grenseflata. Innafor kula er feltet lineært, så får det et sprang i $r = R$ før det avtar som $\frac{1}{r^2}$ utafor kula. Også i dette tilfellet stemmer dette med det analytiske resultatet i (17). Diskontinuiteten kommer av at det i dielektriske materialer oppstår indusert (bunden) ladning. Siden $\sigma_{fri} = 0$ vil (10) gi

²numpy.scipy.org

³scipy.org

$$\vec{E}_{ut}^\perp - \vec{E}_{inn}^\perp = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{bunden} \quad (21)$$

Tabell (2) gir verdiene for den induerte ladninga og for diskontinuiteten i \vec{E} . Settes disse inn i formel (21) fåes at venstre side = $3.18309981677 \cdot 10^{-7} \frac{V}{m} \approx 3.18309886184 \cdot 10^{-7} \frac{V}{m} =$ høyre side. Den lille forskjellen kommer av at det er brukt numeriske metoder ved beregning og at verdien på konstanter som bl.a. ϵ_0 ikke er nøyaktig. De beregna resultatene stemmer altså godt overens med teorien.

Potensialet

Potensialet er gitt i figur 3. Grafen viser at potensialet er kontinuerlig. I grenseflata er det imidlertid en knekk. Det er fordi $\frac{\partial V}{\partial r} = -E$, og siden E-feltet er diskontinuerlig i grensa, må også den deriverte av potensialet være det. Grafen stemmer godt overens med det analytiske resultatet i (3).

Oppgave 2

I oppgave 2 er det ingen analytiske resultat å sammenligne med, så diskusjonen om hvor rimelige resultatene er blir mer på grunnlag av hvordan felte kvalitativt bør oppføre seg ifølge teorien.

D-feltet

Plottet av D-feltet er gitt i figur 5. Sammenligning med ladningsfordelinga i figur 4 viser at grafen kvalitativt gir et godt resultat. Når den totale ladninga innafor ei gitt Gauss-flate er negativ vil feltet også være negativt, det vil si retta radielt innover mot sentrum. Dette følger av (5). Tilsvarende blir feltet retta radielt utover når den totale ladninga innafor Gauss-flata er positiv. For $r > R$ går feltet av som $\frac{1}{r^2}$, altså som feltet fra ei punktladning. Dette er som forventet.

Ser videre at feltet er kontinuerlig. Ved samme argument som i oppgave 1 fås det derfor at $\sigma_{fri} = 0$. Igjen er dette en konsekvens av kontinuiteten og likning (13).

E-feltet

Det numerisk beregna E-feltet er vist i figur 6. Innafor kula er feltet veldig likt som det tilsvarende D-feltet. Det er fordi likning (7) gir at E og D er proporsjonale. Da må de også ha samme form på utsida av kula, som også grafene viser. E-feltet har imidlertid som i oppgave 1 en diskontinuitet i grenseflata. Den oppstår på grunn av at det blir induert ladning i det dielektriske materialet. Siden $\sigma_{fri} = 0$ vil likning (21) også gjelde her. Gjør samme beregning som i oppgave 1. Verdiene finnes nå i tabell (4). Innsetting i (21) gir venstre side = $294877341.335 \frac{V}{m} \approx 294877518.262 \frac{V}{m} =$ høyre side. Også her er det en liten forskjell, men den kommer også av unøyaktighet i beregningene. I figuren er også feltet fra ei punktladning med samme ladning som kula tatt med. Dette feltet er bare plotta utfor kula siden det vil gå mot uendelig når r går mot 0. Det overlapper helt med feltet fra kula for $r > R$. Utafor kula er det altså det samme om feltet kommer fra den oppgitte ladningsfordelinga eller om det kommer fra ei punktladning. Det viser at feltet kun avhenger av total ladning innafor et kuleskall og ikke av hvordan ladninga er fordelt.

Potensialet

Potensialet er gitt i figur 7. Ser av grafen at potensialet er kontinuerlig, som det må være. Det stemmer altså med (11). Det kan sees en knekk i grensa. Det er fordi $\frac{\partial V}{\partial r} = -E$. Siden E-feltet er diskontinuerlig i grensa må også den deriverte av potensialet være det.

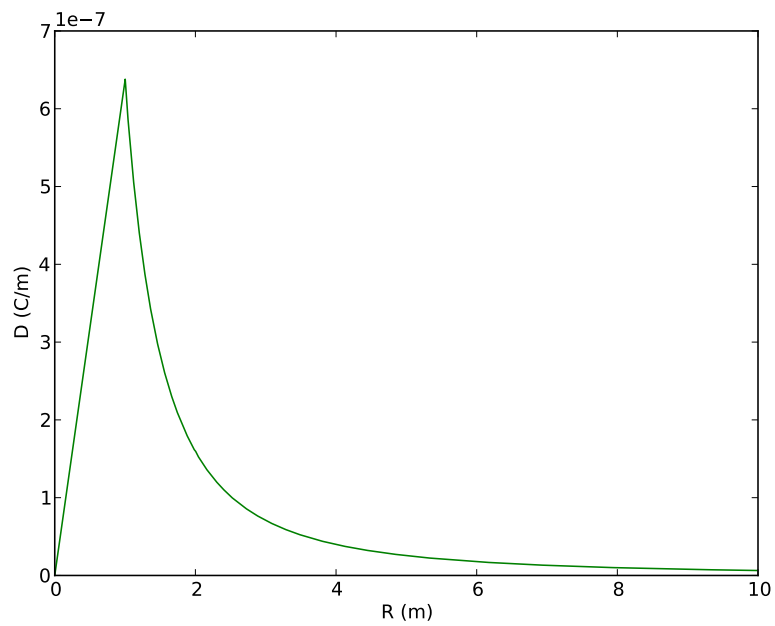
Konklusjon

I denne oppgaven er det på bakgrunn av elektromagnetisk teori gjort numeriske beregninger av felter for to ulike ladningsfordelinger. De resultater som er beregnet numerisk stemmer godt overens med de resultatene som er forventet med utgangspunkt i teorien. Det gjelder både i oppgave 1, der de samme resultatene lett kunne regnes ut analytisk som sammeligningsgrunnlag, og i oppgave 2.

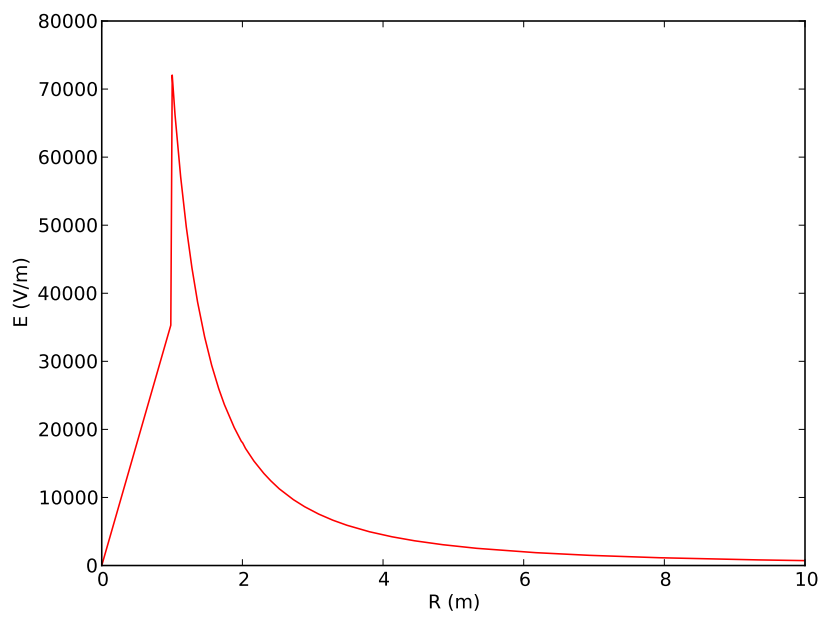
I oppgave 2 kunne ikke resultatet lett ha blitt regnet ut analytisk. Derfor er grensebetingelsene det viktigste teoretiske sammenligningsgrunnlaget i denne oppgaven. De numeriske resultatene stemte godt overens med de grensebetingelsene som er gitt i teorien.

Referanser

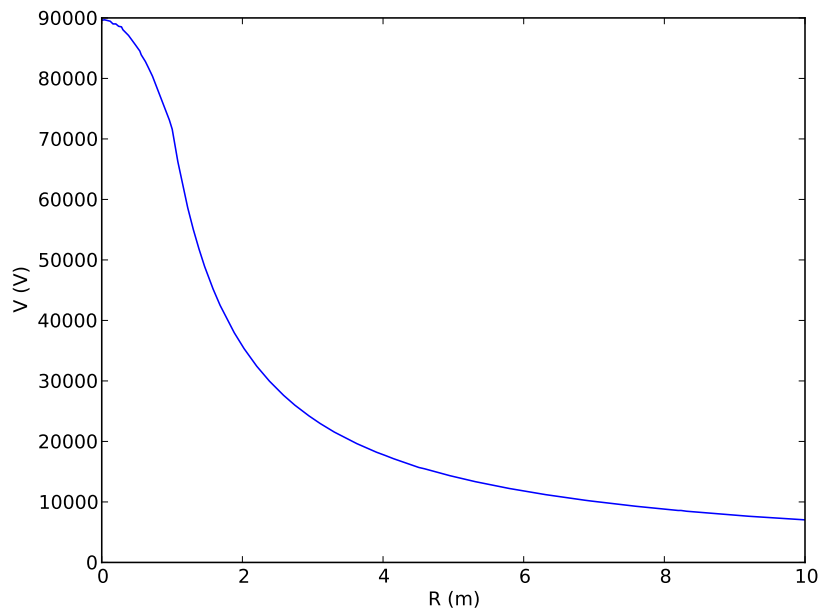
David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Pearson Benjamin Cummings, 3rd edition, 2008.



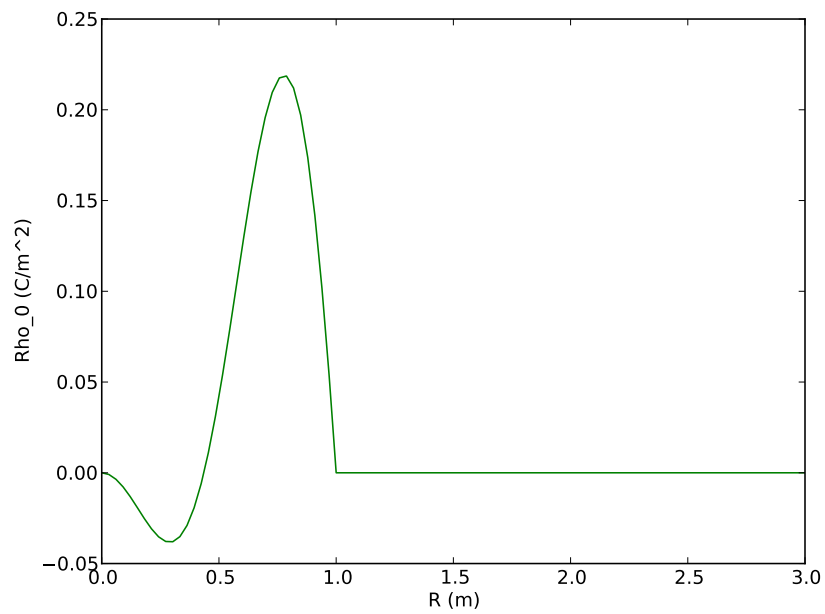
Figur 1: Det elektriske forskyvningsfeltet som funksjon av avstanden fra sentrum av kula (oppgave 1).



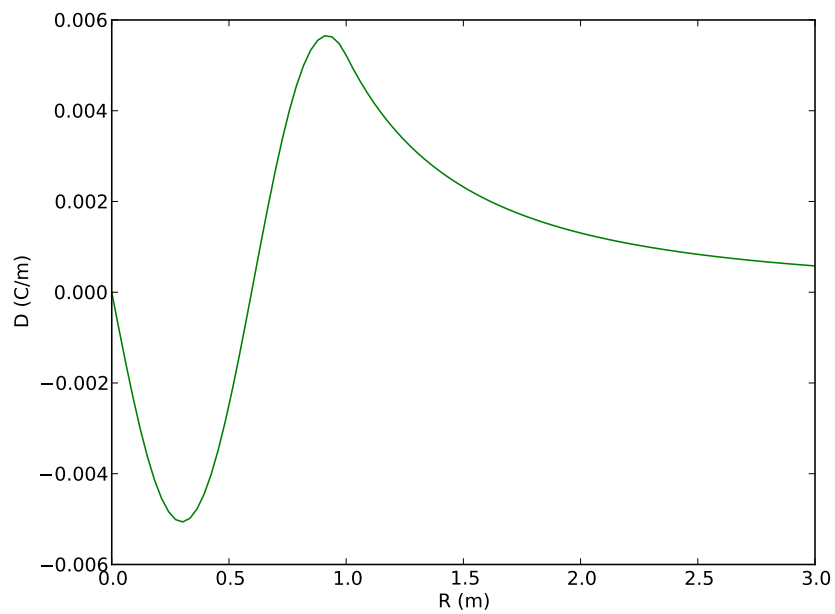
Figur 2: Det elektriske feltet som funksjon av avstanden fra sentrum av kula (oppgave 1).



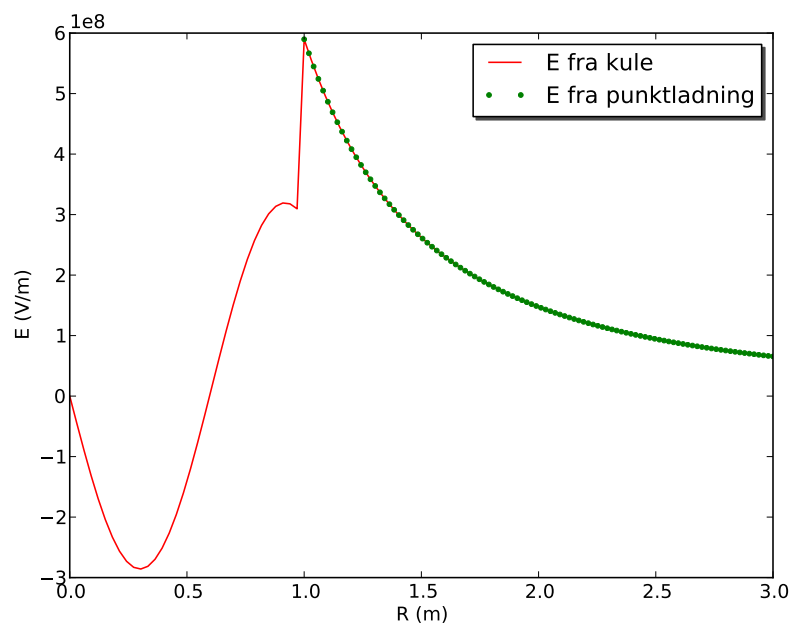
Figur 3: Det elektriske potensialet som funksjon av avstanden fra sentrum av kula (oppgave 1).



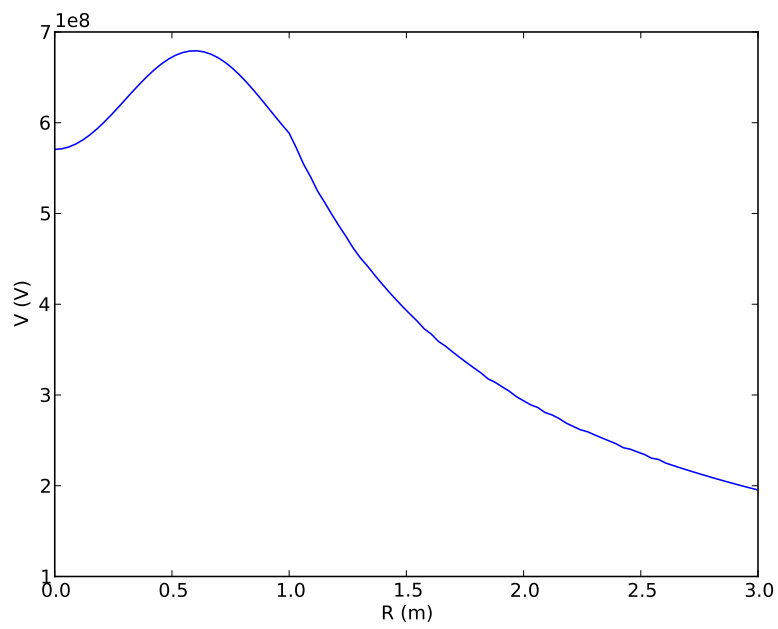
Figur 4: Ladningsfordelinga som funksjon av avstanden fra sentrum av kula (oppgave 2).



Figur 5: Det elektriske forskyvningsfeltet som funksjon av avstanden fra sentrum av kula (oppgave 2).



Figur 6: Det elektriske feltet som funksjon av avstanden fra sentrum av kula. Feltet fra punktladninga vil fortsette mot uendelig når $R \rightarrow 0$ (oppgave 2).



Figur 7: Det elektriske potensialet som funksjon av avstanden fra sentrum av kula (oppgave 2).