Oppgåve 1 Spelet Tenzies

Ein regulær terning har 6 sider. Når terningen blir trilla er sannsynet for kvart utfall, x, lik $1/6 = p$, $x = 1, \dots, 6$. I spelet Tenzies trillar ein 10 terningar i fleire rundar til alle har vist talet '6'. I praksis legg ein til side terningar som alt har vist '6', og kun dei som ikkje har vist '6' blir trilla i neste runde.

a) La Y vere talet på terningar som viser '6' i første runde.

Kva blir sannsynsfordelinga til Y?

Rekn ut $P(Y > 0)$.

Rekn ut $P(Y = 1|Y > 0)$.

b) La Z_i vere talet på rundar til terning $i = 1, \dots, 10$ viser '6'.

Forklar kvifor kvar Z_i, $i = 1, \dots, 10$ er geometrisk fordelt. Kva er formelen for punktsannsyna til kvar Z_i?

Bruk at for $0 < q < 1$, så er $1 + q + q^2 + \dots + q^{z-1} = \sum_{i=1}^{z} q^{i-1} = \frac{1-q^z}{1-q}$, til å finne den kumulative fordelingsfunksjonen til kvar Z_i.

Finn verdien z som splittar sannsynsfordelinga til Z_i i to like delar (teoretisk median).

c) La W vere talet på rundar til ein oppnår Tenzies.

Finn eit uttrykk for den kumulative fordelingsfunksjonen til W.

Dersom ein oppnår Tenzies på 10 eller færre rundar så er ein konge. Kva er sannsynet for å bli konge?

Oppgåve 2 Støymålingar

I ei prosjektoppgåve skal Jan Thomas analysere data av støymålingar.

a) Vi går ut i frå at ei støymåling, Y, er normalfordelt med forventning $\mu = 40$ dB og standardavvik $\sigma = 10$ dB.

Kva er sannsynet for at ei støymåling er høgare enn 60 dB?

Kva er sannsynet for at ei støymåling ligg mellom 50 dB og 60 dB?

La c vere ei grense for kritisk støy bestemt slik at $P(Y > c) = 0.01$. Kva er c?

Jan Thomas har fått tilgong til data med $n = 30$ målingar frå ein stad i Trondheim. Av omsyn til bumiljøet skal støynivået helst ikkje overskride 50 dB.

b) Jan Thomas går ut i frå at støymålingane er uavhengige og identisk fordelte. Han let Y_i vere måling i og set at $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, der μ og σ^2 er ukjende.

I talmaterialet er $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 57.0$ og $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 11.9^2$.

Finn eit 95 % konfidensintervall for μ.

Jan Thomas får kontakt med firmaet som har samla inn støymålingane, og han får oversendt data som vist i Tabell 1. Firmaet oppgjev at målingane er gjennomførte i to veker av November 2022.

Tabell 1: Måling av støy (dB) på ulike dagar og heile klokketimar.

	Måndag			Tysdag			Onsdag			Torsdag			Fredag		
Tid (kl time)	8	12	16	8	13	15	9	12	17	8	10	16	9	13	17
Støy (dB)	68	41	48	74	32	60	71	38	51	64	46	60	58	49	60
	Måndag			Tysdag			Onsdag			Torsdag			Fredag		
Tid (kl time)	10	13	16	8	12	16	8	12	17	9	12	15	8	12	16
Støy (dB)	61	51	58	71	39	63	66	44	59	70	52	65	80	45	65

Basert på denne informasjonen, ser Jan Thomas at han må ta omsyn til klokketida t_i på døgnet målingane er utførte. For klokketidene som data er samla inn på, føresler han ein regresjonsmodell:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \left[\cos\left(\frac{t_i - 8}{4}\pi\right) + 1\right] + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

der støyledda $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ er uavhengige og identisk normalfordelte med forventning 0 og varians σ^2. Det blir oppgitt at $\sum_{i=1}^{30} x_i = 38.5$, $\sum_{i=1}^{30} y_i = 1709$, $\sum_{i=1}^{30}(x_i - \bar{x})^2 = 20.1$ og $\sum_{i=1}^{30}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{30}(x_i - \bar{x})y_i = 227.7$, der $x_i = \cos\left(\frac{t_i-8}{4}\pi\right) + 1$.

c) Kva er tolkinga av β_0 i likning (1)?

Jan Thomas vil undersøke om det er grunn til å konkludere med at forventa støynivå under normalforhold (definert som kl 12 på dagen) er under 50 dB ved å utføre ein hypotesetest for β_0. Formuler hypotesetesten.

Variansen til minstekvadratsumsestimatoren for β_0 er gitt ved $\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)$.

Det blir oppgitt at estimatet for σ^2 er 7.32^2. Gjennomfør hypotesetesten når signifikansnivået $\alpha = 0.05$.

Oppgåve 3 Bilverkstaden

Ein verkstad klassifiserer feil i det elektriske anlegget til ein bil til å vere av 2 typar, A-feil og B-feil, avhengig av kva feilkode som blir gitt i feilsøkinga. Tidene målt i timar som går med til å finne ein A-feil, X, og ein B-feil, Y, er gitt ved sannsynstettleikane $f_X(x) = \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}$, $x > 0$, $\beta > 0$ og $f_Y(y) = \frac{y}{\beta^2}e^{-y/\beta}$, $y > 0$, $\beta > 0$. Parameteren β er den same i begge fordelingane.

a) Anta at $\beta = 1$ og finn sannsynet for at X er mindre enn 1.

Den momentgenererande funksjonen til X er gitt ved $M_X(t) = \frac{1}{1-\beta t}$, $t < \frac{1}{\beta}$. Bruk denne til å finne $E(X)$ og $Var(X)$ uttrykt ved β.

I resten av oppgåva skal vi gå ut i frå at β er ukjend.

b) Vis at $Z = \frac{2Y}{\beta}$ er χ^2-fordelt (kjikvadratfordelt) med 4 fridomsgrader.

Bruk dette til å finne $E(Y)$ og $Var(Y)$ uttrykt ved β.

c) Gå no ut i frå at vi har m_1 tider $X_1, \ldots, X_{m_1}$ for feilsøking etter A-feil og m_2 tider $Y_1, \ldots, Y_{m_2}$ for feilsøking etter B-feil. Ein går ut i frå at alle tider er uavhengige. Vis at sannsynsmaksimeringsestimatoren for β er gitt ved $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} X_i + \sum_{j=1}^{m_2} Y_j}{m_1 + 2m_2}$.

Finn forventning og varians til denne estimatoren.

d) Ein kunde har venta i mange timar på at feilen skal bli funnen og mistenkjer at β er større enn 1 som er den verdien verkstaden hevdar. Gå ut frå at vi har $m_1 = m_2 = 100$ og at $\bar{x} = 1.43$ og $\bar{y} = 2.80$.

Forklar kvifor $\hat{\beta}$ tilnærma er normalfordelt.

Formuler ein hypotesetest for denne situasjonen basert på mistanken til kunden. Føreslå ein eigna testobservator (teststatistikk) og rekn ut p-verdien til denne hypotesetesten med dei gitte dataane. Kommenter resultatet.