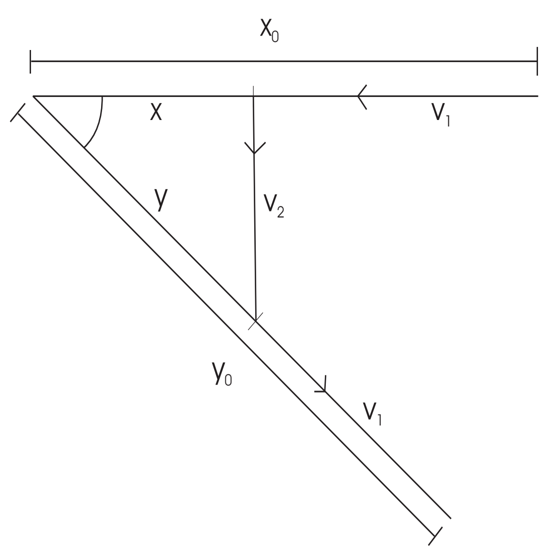
Skiligningen

Eivind Fonn og Halvor Lund

9. mai 2005

Ide

Ideen til følgende problem ble født på en skitur over Langvatnet i Jotunheimen. Anta at en skiløper nærmer seg et krapt løypekryss hvor han har tenkt å gjøre en sving med vinkel θ. Skiløperen har en strekning på x_0 å gå før han når krysset, og planlegger å gå en strekning y_0 etter det. Begge disse strekningene er rette linjer. Skiløperen går med fart v_1 i sporet, og v_2 i snøen. Han har muligheten til å ta en snarvei, dvs. å gå ut av sporet og krysse rett over snøen. Dette skjer en viss strekning x før krysset, og han kommer inn på sporet igjen i en avstand y etter krysset. Som en funksjon av $\theta, v_1, v_2, x_0, y_0$, hva vil x, y være hvis løperen ønsker å gå mest mulig effektivt?



Figur 1: Oversikt over situasjonen.

Løsning

Antagelser:

- $0 < \theta < \pi$
- $x_0 \geq x \geq 0$
- $y_0 \geq y \geq 0$

Tiden t løperen bruker på hele traseen vil bli:

$$t(x, y) = \frac{x_0 - x}{v_1} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta}}{v_2} + \frac{y_0 - y}{v_1}$$

Vi vil minimere t på området $D = \{(x, y)|x_0 \geq x \geq 0, y_0 \geq y \geq 0\}$.

$$\begin{aligned}\nabla t(x, y) = &\left[\frac{1}{2v_2}\left(x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}(2x - 2y\cos\theta) - \frac{1}{v_1}\right]\hat{x} \\ &+ \left[\frac{1}{2v_2}\left(x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}(2y - 2x\cos\theta) - \frac{1}{v_1}\right]\hat{y}\end{aligned}$$

$\nabla t(x, y) = \vec{0}$ gir:

$$\frac{1}{2v_2}\left(x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}(2x - 2y\cos\theta) = \frac{1}{v_1}$$

$$\frac{1}{2v_2}\left(x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}(2y - 2x\cos\theta) = \frac{1}{v_1}$$

Og til slutt:

$$x = y$$

Ved å substituere $x = y$ kan vi forenkle $t(x, y)$ til en funksjon av én variabel, $t(x)$:

$$t(x) = \frac{x_0 + y_0}{v_1} + \left(\frac{\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}{v_2} - \frac{2}{v_1}\right)x$$

Denne funksjonen er lineær og har følgende ingen maksima eller minima. Endepunktene på det aktuelle intervallet vil da gi oss den maksimale og minimale verdien på dette intervallet. Vi lar $t_0 = t(0)$ være tiden det tar å gå via løypa, og $t_1 = t(x_0)$ tiden det tar å gå rett over snøen. Da:

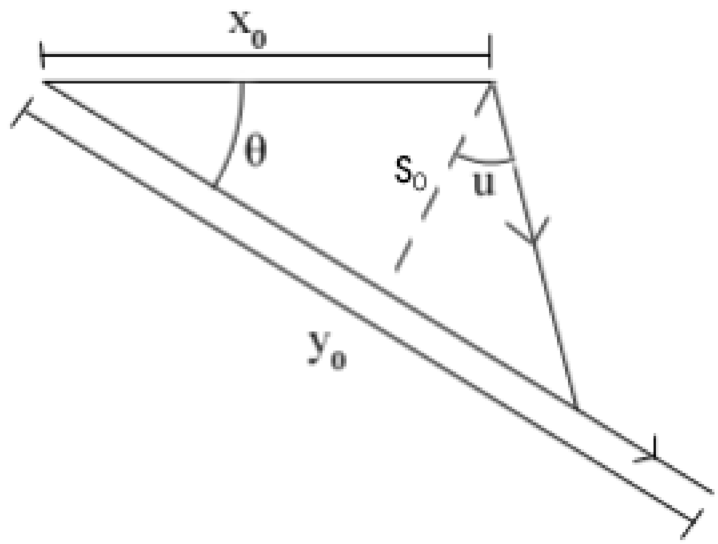
$$t_0 = \frac{x_0 + y_0}{v_1}$$

$$t_1 = \frac{y_0}{v_1} + \left(\frac{\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)x_0$$

Det lønner seg å gå over snøen hvis $t_1 < t_0$:

$$\frac{\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}{v_2} < \frac{2}{v_1}$$

Og dermed:



Figur 2: Oversikt over situasjonen dersom $x \neq y$. u er vinkelen mellom optimal rute og rute der $x = y$.

$$\frac{v_2}{v_1} > \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$$

Her har vi imidlertid gått ut fra at $x = y$, men dette kan ikke være tilfelle hvis $x_0 \neq y_0$. Det kan altså lønne seg å ta en rute der $x \neq y$ dersom ovenstående ulikhet er oppfylt. Vi blir derfor nødt til å se på om det lønner seg å komme inn på løypa i annen avstand fra krysset enn avstanden der vi tar av. Se figur 2 for et klarere bilde på denne situasjonen.

Tiden vi bruker vil nå bli en funksjon av vinkelen u:

$$t(u) = \frac{s_0}{v_2 cos(u)} + \frac{y_0 - x_0 - s_0 tan(u)}{v_1}$$

Ved å derivere får vi:

$$t'(u) = \frac{-sin(u)}{cos(u)^2} s_0 v_2 + \frac{s_0 v_1}{cos(u)^2} = \frac{s_0 v_1 - sin(u) s_0 v2}{cos(u)^2}$$

$t'(u) = 0$ gir til slutt:

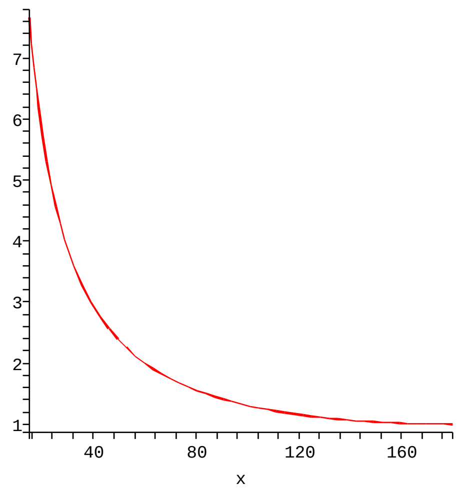
$$sin(u) = \frac{v_2}{v_1}$$

Konklusjon

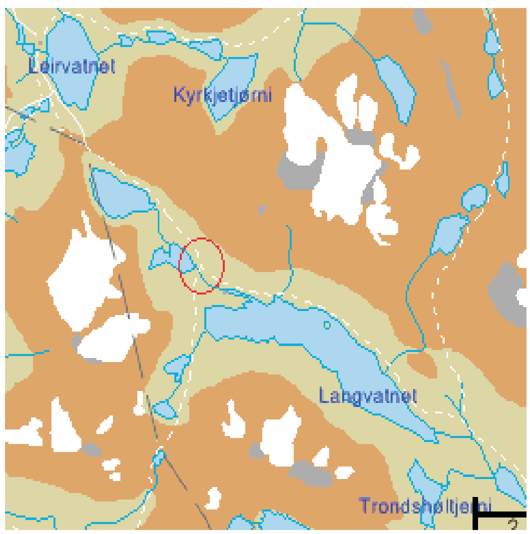
1. Hvis det lønner seg å gå over snøen, lønner det seg å gjøre det så snart som mulig.
2. Avgjørelsen om det lønner seg å gå over snøen avhenger bare av forholdet mellom hastighetene i løypa og i snøen og vinkelen på svingen.
3. Det lønner seg å gå over snøen dersom $\frac{v_2}{v_1} > \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$, der v_1 er farten i sporet, v_2 er farten i snøen og θ er vinkelen på svingen.

4. Dersom det lønner seg å gå over snøen, bør det gjøres langs en løype som danner en vinkel $\frac{\pi-\theta}{2} - u$ med løypa, der $u = arcsin(\frac{v_2}{v_1})$ $(v_2 \leq v_1)$.

Denne grafen viser resultatet i grafisk form. Grafen viser hvor stort forholdet $\frac{v_1}{v_2}$ må være hvis det skal lønne seg å gå i løypa, som funksjon av svingens vinkel θ (her x), målt i grader. Hvis forholdet mellom hastighetene ligger over grafen, lønner det seg å følge løypa. Hvis den ligger under, bør du heller gå ut i snøen. På selve grafen vil du ikke tjene noe på noen av valgene, og du anbefales å følge sporet, så du iallfall ikke roter deg bort. ;)



Figur 3: $\frac{v_1}{v_2}$ som funksjon av θ i grader. På punkter over grafen vil det lønne seg å følge sporet.



Figur 4: Denne svingen inspirerte Halvor Lund til dette arbeidet. Vi ser her at vinkelen er ca. 75°, og siden Halvor Lund antar at han går dobbelt så raskt i sporet som i snøen, konkluderte han med at det ville lønne seg å følge sporet.